

VI.5 Doplnky k teorii neomezených operátorů

Tvrzení 24. *Nechť E je abstraktní spektrální míra v Hilbertově prostoru H definovaná na σ -algebře \mathcal{A} . Pro \mathcal{A} -měřitelnou funkci $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ označme $\Phi(f) = \int f \, dE$.*

- (1) *Nechť $x \in H$. Označme $H_x = \{\Phi(f)x; f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{C})\}$. Pak H_x je (ne nutně uzavřený) podprostor H a zobrazení $U_x : f \mapsto \Phi(f)x$ je lineární izometrie prostoru $L^2(E_{x,x})$ na $\overline{H_x}$.*
- (2) *Existuje množina $\Gamma \subset S_H$ s vlastnostmi:*
 - $H_x \perp H_y$ pro $x, y \in \Gamma, x \neq y$.
 - $\text{span}(\bigcup_{x \in \Gamma} H_x)$ je hustý podprostor H .
- (3) *Nechť $\Omega = \Gamma \times \mathbb{C}$. Nechť*

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{A \subset \Omega; \forall x \in \Gamma : \{\lambda \in \mathbb{C}; (x, \lambda) \in A\} \in \mathcal{A}\}$$

a

$$\mu(A) = \sum_{x \in \Gamma} E_{x,x}(\{\lambda \in \mathbb{C}; (x, \lambda) \in A\}), \quad A \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Pak $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \mu)$ je prostor s nezápornou mírou. Navíc zobrazení $U : L^2(\mu) \rightarrow H$ definované vzorcem

$$U(g) = \sum_{x \in \Gamma} \Phi(\lambda \mapsto g(x, \lambda))x, \quad g \in L^2(\mu)$$

je lineární izometrie $L^2(\mu)$ na H .

- (4) *Nechť $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je \mathcal{A} -měřitelná funkce. Pak $\Phi(f) = UM_{\tilde{f}}U^*$, kde*

$$\tilde{f}(x, \lambda) = f(\lambda), \quad (x, \lambda) \in \Omega$$

a $M_{\tilde{f}}$ je operátor na $L^2(\mu)$ daný vzorcem

$$M_{\tilde{f}}g = \tilde{f} \cdot g, \quad g \in D(M_{\tilde{f}}) = \{g \in L^2(\mu); \tilde{f} \cdot g \in L^2(\mu)\}.$$

Věta 25 (diagonalizace normálního operátoru). *Nechť T je normální operátor na Hilbertově prostoru H . Pak T je unitárně ekvivalentní vhodnému operátoru násobení. Tj. existuje nezáporná míra μ , unitární operátor $U : L^2(\mu) \rightarrow H$ a μ -měřitelná funkce f , že $T = UM_fU^*$, kde M_f je definován jako v Tvrzení 24. Navíc platí:*

- (a) *Je-li T samoadjungovaný, f lze zvolit reálně hodnotovou.*
- (b) *Je-li T omezený, f lze zvolit omezenou.*
- (c) *Je-li H separabilní, μ lze zvolit σ -konečnou.*

Věta 26 (jiné vyjádření spektrálního rozkladu samoadjungovaného operátoru). *Nechť T je samoadjungovaný operátor na H a E jeho spektrální míra (z Věty 17). Pak $E(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) = 0$. Pro $\lambda \in \mathbb{R}$ položme $E_\lambda = E((-\infty, \lambda])$. Pak platí:*

- (a) *E_λ je ortogonální projekce pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- (b) *$E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_{\min\{\lambda, \mu\}}$ pro $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
- (c) *$\lim_{\mu \rightarrow \lambda+} E_\mu x = E_\lambda x$ pro každé $x \in H$ a $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- (d) *Pokud λ není vlastní číslo T , pak $\lim_{\mu \rightarrow \lambda-} E_\mu x = E_\lambda x$ pro každé $x \in H$.*
- (e) *Pokud λ je vlastní číslo T , pak vzorec $P_\lambda x = \lim_{\mu \rightarrow \lambda-} E_\mu x, x \in H$, definuje ortogonální projekci, pro kterou $E_\lambda - P_\lambda$ je též ortogonální projekce a navíc $R(E_\lambda - P_\lambda) = \text{Ker}(\lambda I - T)$.*
- (f) *$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} E_\mu x = 0$ a $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} E_\mu x = x$ pro každé $x \in H$.*
- (g) *Reálné číslo λ patří do $\rho(T)$, právě když zobrazení $\mu \mapsto E_\mu$ je konstantní na nějakém okolí λ .*

Věta 27 (samoadjungované operátory na reálném Hilbertově prostoru). Necht' H je reálný Hilbertův prostor a T operátor na H . Pak lze definovat T^* stejně jako v komplexním případě (viz oddíl V.4). Necht' H_C je hilbertovská komplexifikace H , tj. prostor $H_C = H + iH = \{x + iy; x, y \in H\}$ opatřený skalárním součinem

$$\langle x + iy, u + iv \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle + i \langle y, u \rangle - i \langle x, v \rangle, \quad x + iy, u + iv \in H_C.$$

Definujme operátor T_C na H_C předpisem

$$T_C(x + iy) = T(x) + iT(y), \quad x + iy \in D(T_C) = D(T) + iD(T).$$

Pak platí

- (a) Je-li T hustě definovaný, pak T_C je též hustě definovaný a $(T_C)^* = (T^*)_C$.
- (b) Je-li $T \in L(H)$, pak $T_C \in L(H_C)$ a $\|T_C\| = \|T\|$.
- (c) Je-li T samoadjungovaný, pak T_C je též samoadjungovaný a navíc pro $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$\lambda I - T \text{ je invertibilní v } L(H) \Leftrightarrow \lambda I_C - T_C \text{ je invertibilní v } L(H_C).$$

- (d) Necht' T je samoadjungovaný a E je spektrální míra T_C , \mathcal{A} necht' je příslušná σ -algebra. Pak vzorec

$$E_R(A) = E(A)|_H, \quad A \in \mathcal{A}$$

definuje "reálnou spektrální míru" na \mathbb{R} a platí $T = \int \text{id} \, dE_R$.

Důsledek 28. Necht' H je reálný Hilbertův prostor.

- (i) Je-li $T \in L(H)$ samoadjungovaný, pak $\sigma(T)$ je neprázdná kompaktní podmnožina \mathbb{R} . Navíc pro reálnou spojitou funkci f na $\sigma(T)$ lze definovat $\tilde{f}(T)$ (jako restrikcí $\tilde{f}(T_C)$ na H). Přiřazení $f \mapsto \tilde{f}(T)$ splňuje podmínky (a)–(e) z Věty IV.38 (po zřejmých úpravách).
- (ii) Je-li $T \in L(H)$, lze definovat operátor $|T| = \sqrt{T^*T}$ (jako v oddílu V.1). Věta V.8 tedy platí pro reálné prostory.
- (iii) Je-li $T \in L(H)$ kompaktní samoadjungovaný, platí tvrzení Věty V.9 (s tím, že čísla λ_k jsou reálná). Dále platí i tvrzení Věty V.10 pro reálnou funkci f .
- (iv) Je-li $T \in L(H)$ kompaktní, platí tvrzení Věty V.11.