VII. Více o lokálně konvexních topologiích

Připomenutí:

- **Lokálně konvexní prostor** je vektorový prostor X nad $\mathbb{F}$ opatřený topologií $\mathcal{T}$ s vlastnostmi:
  - Zobrazení $(x, y) \mapsto x + y$ je spojité zobrazení $X \times X \to X$.
  - Zobrazení $(t, x) \mapsto t \cdot x$ je spojité zobrazení $\mathbb{F} \times X \to X$.
  - Existuje báze okolí nuly tvořená konvexními množinami.
- Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $\mathcal{U}$ neprázdný systém jeho podmnožin s vlastnostmi:
  (a) Prvky $\mathcal{U}$ jsou absolutně konvexní a pohlcující.
  (b) Pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $2V \subset U$.
  (c) Pro každé dva prvky $U, V \in \mathcal{U}$ existuje $W \in \mathcal{U}$ splňující $W \subset U \cap V$.

  Pak existuje právě jedna lokálně konvexní topologie na X, pro níž je $\mathcal{U}$ báze okolí nuly. Tato topologie je Hausdorffova, právě když $\bigcap \mathcal{U} = \{\boldsymbol{o}\}$.

  Obráceně, každý lokálně konvexní prostor má bázi okolí nuly $\mathcal{U}$ s vlastnostmi (a)-(c). Navíc lze bázi $\mathcal{U}$ volit tvořenou otevřenými množinami.
- Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $\mathcal{P}$ je neprázdný systém pseudonorem na X. Pak systém

$$\mathcal{U} = \{\{x \in X; p_1(x) < c_1, \dots, p_n(x) < c_n\}; p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, c_1, \dots, c_n \in (0, \infty)\}$$

  je bází okolí nuly nějaké (jednoznačně určené) lokálně konvexní topologie na X.

  Obráceně, každá lokálně konvexní topologie na X je takto definovaná nějakým systémem pseudonorem, například systémem všech spojitých pseudonorem.

  Navíc, je-li topologie $\mathcal{T}$ generována systémem pseudonorem $\mathcal{P}$, pak pseudonorma p je $\mathcal{T}$-spojitá, právě když existují $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $c > 0$, že $p \le c \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}$.

VII.1 Svaz lokálně konvexních topologií a topologie souhlasící s dualitou

Značení: Nechť X je vektorový prostor. Označme symbolem $\mathscr{LC}(X)$ systém všech lokálně konvexních topologií na X.

Tvrzení 1. *Nechť X je vektorový prostor. Pak je $\mathscr{LC}(X)$ úplný svaz. Tj., je-li $\mathscr{F} \subset \mathscr{LC}(X)$ libovolný neprázdný podsystém, pak existuje nejslabší lokálně konvexní topologie jemnější než všechny prvky $\mathscr{F}$ (tu značíme $\sup \mathscr{F}$) a nejsilnější lokálně konvexní topologie slabší než všechny prvky $\mathscr{F}$ (tu značíme $\inf \mathscr{F}$). Lze je popsat následovně:*

- *$\sup \mathscr{F}$ je generovaná systémem všech pseudonorem, které jsou spojité v nějaké topologii ze systému $\mathscr{F}$.*
- *$\inf \mathscr{F}$ je generována systémem všech pseudonorem, které jsou spojité ve všech topologiích ze systému $\mathscr{F}$.*

Poznámky:

(1) Pokud aspoň jeden prvek $\mathscr{F}$ je Hausdorffova topologie, je i $\sup \mathscr{F}$ Hausdorffova topologie.
(2) $\sup \mathscr{LC}(X)$ je nejsilnější lokálně konvexní topologie. Bázi okolí nuly tvoří všechny pohlcující absolutně konvexní množiny. Všechny pseudonormy jsou v ní spojité, je tedy generována systémem všech pseudonorem na X. Všechny lineární funkcionály jsou v ní spojité, tedy $(X, \sup \mathscr{LC}(X))^* = X^\#$ (algebraický duál X).
(3) $\inf \mathscr{LC}(X)$ je indiskrétní topologie, jediné okolí nuly je celý prostor X, jediná spojitá pseudonorma je nulová a jediný spojitý lineární funkcionál je nulový.
(4) Je-li $\dim X < \infty$, existuje na X jediná Hausdorffova lokálně konvexní topologie.
(5) Nechť $\dim X = \infty$. Pak $\inf \mathscr{F}$ nemusí být Hausdorffova topologie, i když jsou všechny její prvky Hausdorffovy. Dokonce infimum systému všech Hausdorffových lokálně konvexních topologií je indiskrétní topologie.

Lemma 2. *Nechť X je vektorový prostor, $f : X \to \mathbb{F}$ lineární funkcionál a $p_1, \dots, p_n$ pseudonormy na X. Pokud $|f| \le \max\{p_1, \dots, p_n\}$, pak existují lineární funkcionály $f_1, \dots, f_n$, a čísla $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ splňující*

(i) $|f_j| \le p_j$ *pro* $j = 1, \dots, n$;
(ii) $f = t_1 f_1 + t_2 f_2 + \dots + t_n f_n$;
(iii) $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$.

Tvrzení 3. *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{F} \subset \mathscr{LC}(X)$ je libovolný neprázdný podsystém. Pak platí*

$$(X, \sup \mathcal{F})^* = \operatorname{span}\left(\bigcup_{\mathcal{T}\in\mathcal{F}} (X,\mathcal{T})^*\right), \quad (X, \inf \mathcal{F})^* = \bigcap_{\mathcal{T}\in\mathcal{F}} (X,\mathcal{T})^*.$$

Definice. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset\subset X^\perp$.

- Označme
$$\mathscr{LC}(X,M) = \{\mathcal{T} \in \mathscr{LC}(X); (X,\mathcal{T})^* = M\}.$$
Pokud X je lokálně konvexní prostor a $M = X^*$, pak se topologie ze systému $\mathscr{LC}(X,X^*)$ nazývají **přípustné topologie** nebo **topologie souhlasící s dualitou**.
- Dle Tvrzení 3 má systém $\mathscr{LC}(X,M)$ nejmenší a největší prvek, tj.
$$\inf \mathscr{LC}(X,M) \in \mathscr{LC}(X,M) \qquad \text{a} \qquad \sup \mathscr{LC}(X,M).$$
Nejmenší prvek se nazývá **slabá topologie generovaná** M a značí se $\sigma(X,M)$ (splývá se slabou topologií z oddílu II.1). Největší prvek se nazývá **Mackeyho topologie generovaná** M, budeme ji značit $\mu(X,M)$. (Často se značí $\tau(X,M)$.)

Lemma 4. *Nechť $(X,\mathcal{T})$ je LCS. Uvažme X^* jako podprostor $X^\#$ a uvažujme topologie $\sigma(X^*,X)$ na X^* a $\sigma(X^\#,X)$ na $X^\#$. Pak platí:*

(a) *Topologie $\sigma(X^\#,X)$ je Hausdorffova. Topologie $\sigma(X^*,X)$ splývá s topologií podprostoru generovanou $\sigma(X^\#,X)$.*
(b) *Je-li $\mathcal{T}$ Hausdorffova, je X^* $\sigma(X^\#,X)$-hustý podprostor $X^\#$.*
(c) *Nechť $A \subset X^*$. Pak A je relativně kompaktní v $(X^*,\sigma(X^*,X))$ (tj. její uzávěr je kompaktní), právě když platí následující dvě podmínky:*
   - ◦ *A je $\sigma(X^*,X)$-omezená.*
   - ◦ $\overline{A}^{\sigma(X^\#,X)} \subset X^*$.

Definice. Nechť X je vektorový prostor.

- Nechť $A \subset X^\#$ je $\sigma(X^\#,X)$-omezená množina. Symbolem q_A budeme značit pseudonormu na X definovanou předpisem
$$q_A(x) = \sup\{|f(x)|; f \in A\}, \quad x \in X.$$
- Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdný systém $\sigma(X^\#,X)$-omezených podmnožin $X^\#$. Pak **topologií stejnoměrné konvergence na prvcích** $\mathcal{A}$ rozumíme lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem pseudonorem $\{q_A; A \in \mathcal{A}\}$.

Lemma 5. *Nechť X je vektorový prostor, $A \subset X^\#$ je $\sigma(X^\#,X)$-omezená množina a $f \in X^\#$. Pak platí*

$$|f| \le q_A \Leftrightarrow f \in \overline{\operatorname{aco} A}^{\sigma(X^\#,X)}.$$

Věta 6 (Mackey-Arens). *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset\subset X^\#$. Pak topologie $\mu(X,M)$ splývá s topologií stejnoměrné konvergence na absolutně konvexních $\sigma(M,X)$-kompaktních podmnožinách M.*

Tvrzení 7. *Nechť $(X,\mathcal{T})$ je metrizovatelný LCS. Pak platí:*

(a) *$(X^*,\sigma(X^*,X))$ je σ-kompaktní.*
(b) *$\mu(X,X^*) = \mathcal{T}$.*

Důsledek 8. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak topologie $\mu(X,X^*)$ je normová topologie na X.*

Příklad 9. *Nechť X je Banachův prostor.*

(1) *Topologie $\mu(X^*,X)$ splývá s topologií stejnoměrné konvergence na absolutně konvexních slabě kompaktních podmnožinách X. Navíc, topologie $\mu(X^*,X)$ splývá s normovou topologií na X, právě když X je reflexivní.*
(2) *Uvažme na X topologii stejnoměrné konvergence na absolutně konvexních slabě kompaktních podmnožinách X^*, označme ji ρ. Pak ρ je přípustná topologie na X, tj. $(X,\rho)^* = X^*$.*