

### VII.3 Kompaktní konvexní množiny

**Úmluva:** V tomto oddílu uvažujeme jen vektorové prostory nad  $\mathbb{R}$ . Nejde o žádnou újmu, neboť všechny definice i výsledky jsou použitelné i pro komplexní prostor, protože se používá jen struktura jeho reálné verze.

**Definice.** Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $A \subset X$  je konvexní množina. Řekneme, že bod  $x \in A$  je **extremálním bodem** množiny  $A$ , jestliže není vnitřním bodem žádné úsečky ležící v  $A$ , tj. platí-li

$$\forall a, b \in A \forall t \in (0, 1) : x = ta + (1 - t)b \Rightarrow a = b = x.$$

Množinu všech extremálních bodů množiny  $A$  značíme  $\text{ext } A$ .

**Poznámka.** Bod  $x \in A$  je extremálním bodem konvexní množiny  $A$ , právě když není středem žádné nedegenerované úsečky v  $A$ , tj. právě když

$$\forall a, b \in A : x = \frac{1}{2}(a + b) \Rightarrow a = b = x.$$

**Příklady 16.** Nechť  $X = \mathbb{R}^2$ . Pak platí:

- (1) Je-li  $A \subset \mathbb{R}^2$  konvexní mnohoúhelník, pak jeho extremálními body jsou právě jeho vrcholy.
- (2) Je-li  $A \subset \mathbb{R}^2$  uzavřený kruh, pak množinou  $\text{ext } A$  je jeho hraniční kružnice.
- (3) Je-li  $A \subset \mathbb{R}^2$  otevřený kruh, pak  $\text{ext } A = \emptyset$ .

**Definice.** Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $A \subset X$  je konvexní množina. Podmnožinu  $F \subset A$  nazveme **hranou** množiny  $A$ , pokud platí následující dvě podmínky:

- $F$  je neprázdná konvexní podmnožina  $A$ ;
- $\forall a, b \in A : \frac{1}{2}(a + b) \in F \Rightarrow a \in F \ \& \ b \in F$ .

**Lemma 17** (vlastnosti hran). Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $A \subset X$  je konvexní množina.

- (a)  $x \in A$  je extremálním bodem množiny  $A$ , právě když  $\{x\}$  je hranou množiny  $A$ .
- (b) Je-li  $F_1 \subset A$  hrana množiny  $A$  a  $F_2 \subset F_1$  je hrana množiny  $F_1$ , pak  $F_2$  je hranou množiny  $A$ .
- (c) Pokud navíc  $X$  je HLCS a  $A$  je kompaktní množina obsahující alespoň dva body, pak existuje uzavřená hrana  $F \subsetneq A$ .

**Věta 18** (Krein-Milman). Nechť  $X$  je HLCS a  $K \subset X$  je konvexní kompaktní množina. Pak

$$K = \overline{\text{co ext } K}.$$

Speciálně, je-li  $K$  neprázdná, pak  $\text{ext } K \neq \emptyset$ .

**Tvrzení 19** (Minkowski-Carathéodory). Necht'  $X$  je HLCS dimenze  $n \in \mathbb{N}$  a  $K \subset X$  je neprázdná kompaktní konvexní množina. Pak  $K = \text{co ext } K$ . Dokonce platí, že každý bod  $K$  lze vyjádřit jako konvexní kombinaci nejvýše  $n + 1$  extrémálních bodů  $K$  a tyto body lze volit afinně nezávislé.

**Příklad 20.** Necht'  $K$  je kompaktní Hausdorffův prostor a  $P(K)$  je množina Radonových pravděpodobností na  $K$  uvažovaná jako podmnožina  $(\mathcal{C}(K)^*, w^*)$ . Pak  $P(K)$  je kompaktní konvexní množina a její extrémální body jsou právě Diracovy míry.

**Tvrzení 21** (Milman). Necht'  $X$  je HLCS a  $K \subset X$  je konvexní kompaktní množina. Pokud  $A \subset K$  splňuje  $K = \overline{\text{co } A}$ , pak  $\text{ext } K \subset \overline{A}$ .

**Tvrzení 22** (o těžišti míry). Necht'  $X$  je HLCS a  $K \subset X$  je kompaktní konvexní množina.

(a) Pro každou  $\mu \in P(K)$  existuje právě jeden bod  $x \in K$  splňující

$$\forall f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ spojitou afinní} : f(x) = \int f \, d\mu.$$

Toto  $x$  se nazývá **těžiště**  $\mu$  a značí se  $r(\mu)$ .

(b) Zobrazení  $r : \mu \mapsto r(\mu)$  je spojitě afinní zobrazení  $P(K)$  na  $K$ .

**Věta 23** (Krein-Milmanova věta o integrální reprezentaci). Necht'  $X$  je HLCS a  $K \subset X$  je kompaktní konvexní množina. Pak pro každé  $x \in K$  existuje  $\mu \in P(K)$  splňující  $\mu(\overline{\text{ext } K}) = 1$  a  $x = r(\mu)$ .

**Tvrzení 24.** Necht'  $X$  je HLCS a  $K \subset X$  je kompaktní konvexní množina.

(a) Je-li  $K$  metrizovatelný, pak  $\text{ext } K$  je  $G_\delta$  podmnožina  $K$ .

(b) Pokud  $\dim X \leq 2$ , pak  $\text{ext } K$  je uzavřená podmnožina  $K$ .

**Poznámka.** Existuje kompaktní konvexní množina  $K \subset \mathbb{R}^3$ , pro kterou množina  $\text{ext } K$  není uzavřená.

**Poznámka.** Platí následující Choquetova věta zesilující Větu 23 v případě metrizovatelného  $K$ :

Neht'  $X$  je HLCS a  $K \subset X$  je metrizovatelná kompaktní konvexní množina. Pak pro každé  $x \in K$  existuje  $\mu \in P(K)$  splňující  $\mu(\text{ext } K) = 1$  a  $x = r(\mu)$ .

Existuje verze této věty i pro nemetrizovatelné  $K$ , její formulace je však složitější.