

V.2 Pojem neomezeného operátoru mezi Banachovými prostory

Definice. Necht X a Y jsou Banachovy prostory nad \mathbb{F} .

- **Operátorem z X do Y** rozumíme lineární zobrazení $T : D(T) \rightarrow Y$, kde $D(T)$ (**definiční obor** operátoru T) je vektorový podprostor prostoru X .
- Obor hodnot operátoru T , tj. množinu $T(D(T))$, značíme $R(T)$.
- Operátor T z X do Y nazveme **hustě definovaný**, pokud jeho definiční obor $D(T)$ je hustý v X .
- **Grafem operátoru T** rozumíme množinu

$$G(T) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(T) \text{ \& } Tx = y\}.$$

- Operátor T se nazývá **uzavřený**, pokud jeho graf $G(T)$ je uzavřená množina v $X \times Y$, tj. pokud pro každou posloupnost (x_n) v $D(T)$, pro kterou platí
 - $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in X$,
 - $Tx_n \rightarrow y$ pro nějaké $y \in Y$;
 platí $x \in D(T)$ a $Tx = y$.
- Necht S a T jsou operátory z X do Y . Píšeme $S \subset T$, pokud $G(S) \subset G(T)$; tj. pokud $D(S) \subset D(T)$ a pro každé $x \in D(S)$ platí $Tx = Sx$. Operátor T se pak nazývá **rozšířením** operátoru S .
- Necht S a T jsou operátory z X do Y . Jejich **součtem** rozumíme operátor $S + T$ s definičním oborem $D(S + T) = D(S) \cap D(T)$ definovaný vzorcem $(S + T)x = Sx + Tx$ pro $x \in D(S + T)$.
- Necht T je operátor z X do Y a $\alpha \in \mathbb{F}$. Pokud $\alpha = 0$, pak operátorem αT rozumíme nulový operátor definovaný na X , pokud $\alpha \neq 0$, pak operátorem αT rozumíme operátor definovaný vzorcem $(\alpha T)x = \alpha \cdot Tx$ na $D(\alpha T) = D(T)$.
- Necht T je operátor z X do Y a S je operátor z Y do Banachova prostoru Z , pak jejich složením rozumíme operátor ST s definičním oborem

$$D(ST) = \{x \in D(T) : Tx \in D(S)\}$$

definovaný vzorcem $(ST)(x) = S(T(x))$ pro $x \in D(ST)$.

- Je-li T prostý operátor z X do Y , **inverzním operátorem k T** rozumíme operátor T^{-1} z Y do X , jehož definičním oborem je $D(T^{-1}) = R(T)$ a který je inverzním zobrazením k T .

Příklady 12.

- (1) Necht $D(T) = C^1([0, 1]) \subset\subset C([0, 1])$ a $T(f) = f'$ pro $f \in D(T)$. Pak T je uzavřený hustě definovaný operátor z $C([0, 1])$ do $C([0, 1])$.
- (2) Necht $D(U) = \{f \in C^1([0, 1]); f'(0) = 0\} \subset\subset C([0, 1])$ a $U(f) = f'$ pro $f \in D(U)$. Pak U je uzavřený hustě definovaný operátor z $C([0, 1])$ do $C([0, 1])$ a platí $U \subsetneq T$, kde T je operátor z příkladu (1).
- (3) Necht $D(S)$ je podprostor $C([0, 1])$ tvořený polynomy a $S(f) = f'$ pro $f \in D(S)$. Pak T je hustě definovaný operátor z $C([0, 1])$ do $C([0, 1])$, který není uzavřený, má však uzavřené rozšíření (a to operátor T z příkladu (1)).
- (4) Necht $D(T)$ je podprostor ℓ^2 tvořený vektory s konečně mnoha nenulovými souřadnicemi. Pro $x = (x_n) \in D(T)$ položme $Tx = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n, 0, 0, \dots)$. Pak T je hustě definovaný operátor z ℓ^2 do ℓ^2 , který nemá uzavřené rozšíření.

Lemma 13 (o grafu operátoru). Podmnožina $L \subset X \times Y$ je grafem nějakého operátoru z X do Y , právě když je to lineární podprostor splňující

$$\{(x, y) \in L : x = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Tvrzení 14. Pro operátory R, S, T mezi Banachovými prostory (pro které mají uvedené operace smysl), platí:

- (i) $(R + S) + T = R + (S + T)$;
- (ii) $(RS)T = R(ST)$;
- (iii) $(R + S)T = RT + ST$ a $T(R + S) \supset TR + TS$. Pokud T je všude definovaný, platí $T(R + S) = TR + TS$.

Tvrzení 15 (o uzavřených operátorech). Nechť T je operátor z X do Y .

- (a) Je-li T uzavřený a $D(T) = X$, pak $T \in L(X, Y)$.
- (b) T má uzavřené rozšíření, právě když $(x_n, Tx_n) \rightarrow (0, y)$ v $D(T) \times Y$ implikuje $y = 0$.
- (c) Je-li T uzavřený a prostý, pak T^{-1} je také uzavřený.

Značení. Je-li T operátor z X do Y , který má uzavřené rozšíření, pak symbolem \overline{T} značíme jeho minimální uzavřené rozšíření, tj. operátor, jehož graf $G(\overline{T})$ je roven $\overline{G(T)}$, uzávěru grafu T v $X \times Y$.

Tvrzení 16. Nechť T je uzavřený operátor z X do Y . Pak platí:

- (a) Je-li $S \in L(X, Y)$, pak $S + T$ je uzavřený operátor a $D(S + T) = D(T)$.
- (b) Je-li $S \in L(Y, Z)$, pak $D(ST) = D(T)$. Pokud S je navíc izomorfismus Y do Z , pak ST je uzavřený.
- (c) Je-li $S \in L(Z, X)$, pak TS je uzavřený.

Příklady 17.

- (1) Nechť $X = \mathcal{C}([0, 1])$, $D(T) = \mathcal{C}^1([0, 1])$, $T(f) = f'$ pro $f \in D(T)$ a $Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\frac{1}{n})$ pro $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ (výsledkem je konstantní funkce). Pak T je hustě definovaný a uzavřený, $S \in L(X)$ a přitom ST nemá uzavřené rozšíření.
- (2) Nechť $X = \ell^2$, $Y = \{(x_n) \in \ell^2; \sum_{n=1}^{\infty} |nx_n|^2 < \infty\}$. Pro $(x_n) \in Y$ položme

$$T((x_n)) = (0, x_1, 2x_2, 3x_3, \dots),$$

$$S((x_n)) = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n, -x_1, -2x_2, -3x_3, \dots).$$

Pak S i T jsou hustě definované uzavřené operátory, ale $S + T$ nemá uzavřené rozšíření.

Tvrzení 18 (o inverzi k uzavřenému operátoru). Nechť T je prostý uzavřený operátor z X do Y . Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) $R(T) = Y$ a $T^{-1} \in L(Y, X)$.
- (ii) $R(T) = Y$.
- (iii) $R(T)$ je hustý v Y a T^{-1} je spojitý na $R(T)$.

Poznámka. Pro neuzavřené operátory podmínky z předchozího tvrzení nejsou ekvivalentní. Podrobněji: Je-li T operátor z X do Y , který není uzavřený, pak:

- Podmínka (i) platit nemůže.
- Podmínka (ii) platit může. Pokud platí, pak neplatí ani (i) ani (iii). V tom případě T může a nemusí mít uzavřené rozšíření. Pokud má uzavřené rozšíření, pak operátor \overline{T} není prostý.
- Podmínka (iii) platit může. Pokud platí, pak neplatí ani (i) ani (ii). V tom případě T může a nemusí mít uzavřené rozšíření. Pokud má uzavřené rozšíření, pak operátor \overline{T} splňuje ekvivalentní podmínky z předchozího tvrzení.