

## V.5 Symetrické operátory a Cayleyova transformace

**Definice.** Nechť  $S$  je symetrický (ne nutně hustě definovaný) operátor na  $H$ . Označme symbolem  $C_S$  operátor

$$C_S = (S - iI)(S + iI)^{-1}.$$

Pak  $C_S$  je operátor na  $H$ , který se nazývá **Cayleyova transformace operátoru  $S$** .

**Věta 32** (vlastnosti  $C_S$ ). Nechť  $S$  je symetrický operátor na  $H$  a  $C_S$  je jeho Cayleyova transformace. Pak

- (a)  $C_S$  je lineární izometrie  $D(C_S) = R(S + iI)$  na  $R(C_S) = R(S - iI)$ .
- (b)  $I - C_S = 2i(S + iI)^{-1}$ ; speciálně, operátor  $I - C_S$  je prostý a  $R(I - C_S) = D(S)$ .
- (c)  $S = i(I + C_S)(I - C_S)^{-1}$ .
- (d)  $C_S$  je uzavřený  $\Leftrightarrow S$  je uzavřený  $\Leftrightarrow D(C_S)$  je uzavřený  $\Leftrightarrow R(C_S)$  je uzavřený.

**Lemma 33** (o izometrickém operátoru). Nechť  $U$  je libovolný operátor na  $H$ , který je izometrií  $D(U)$  na  $R(U)$ . Pak

- (a)  $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$  pro všechna  $x, y \in D(U)$ . Speciálně:  $U$  je unitární, právě když je  $D(U) = R(U) = H$ .
- (b)  $\text{Ker}(I - U) = D(U) \cap (R(I - U))^\perp$ . Speciálně, je-li  $R(I - U)$  hustý v  $H$ , je  $I - U$  prostý.

**Věta 34** (obraz Cayleyovy transformace). Nechť  $U$  je operátor na  $H$ , který je izometrií  $D(U)$  na  $R(U)$ . Předpokládejme, že  $I - U$  je prostý. Pak operátor  $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$  je symetrický a platí  $C_S = U$ . Přitom  $S$  je hustě definovaný, právě když  $R(I - U)$  je hustý.

**Věta 35** (Cayleyova transformace pro samoadjungované operátory).

- (a) Nechť  $S$  je symetrický operátor na  $H$ . Pak  $S$  je samoadjungovaný, právě když  $C_S$  je unitární operátor.
- (b) Nechť  $U$  je unitární operátor na  $H$ , pro který je  $I - U$  prostý. Pak operátor  $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$  je samoadjungovaný a platí  $C_S = U$ .

**Poznámky.**

- (1) Nechť  $S$  a  $T$  jsou symetrické operátory na  $H$ . Pak  $S \subset T$ , právě když  $C_S \subset C_T$ .
- (2) Nechť  $S$  je hustě definovaný uzavřený symetrický operátor na  $H$ . Pak kodimenze podprostorů  $D(C_S)$  a  $R(C_S)$  (tj. dimenze jejich ortogonálních doplňků) nazýváme **indexy defektu** operátoru  $S$ . Pak platí:
  - o  $S$  je samoadjungovaný, právě když oba indexy defektu jsou nulové.
  - o  $S$  je maximální symetrický operátor, právě když aspoň jeden z indexů defektu je nulový.
  - o  $S$  má samoadjungované rozšíření, právě když oba indexy defektu jsou stejné (tj., právě když existuje lineární izometrie  $(D(C_S))^\perp$  na  $(R(C_S))^\perp$ ).
- (3) Nechť  $S$  je uzavřený symetrický operátor na  $H$ , ne nutně hustě definovaný. I v tomto případě lze definovat indexy defektu. Přitom platí:
  - o Pokud  $D(C_S) = H$  nebo  $R(C_S) = H$ , pak  $S$  je hustě definovaný.

Tedy i v tomto případě platí první z výše uvedených ekvivalencí. Z toho snadno plyne, že v druhém bodě platí implikace  $\Leftarrow$  a ve třetím bodě platí implikace  $\Rightarrow$ . Jak je to s obrácenými implikacemi, není zřejmé.