# VI.2 Integrál podle spektrální míry

**Definice.** **Abstraktní spektrální mírou** v Hilbertově prostoru $H$ rozumíme zobrazení $E$ s následujícími vlastnostmi:

(i) Definičním oborem $E$ je nějaká $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ podmnožin $\mathbb{C}$, která obsahuje všechny borelovské množiny.
(ii) Pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $E(A)$ ortogonální projekce na $H$.
(iii) $E(\emptyset) = 0$, $E(\mathbb{C}) = I$.
(iv) Je-li $A \in \mathcal{A}$ takové, že $E(A) = 0$, pak pro každou $B \subset A$ platí $B \in \mathcal{A}$ (a $E(B) = 0$).
(v) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$
(vi) $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$ pro $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$.
(vii) Pro každou dvojici $x, y \in H$ je zobrazení $E_{x,y} : A \mapsto \langle E(A)x, y \rangle$ komplexní borelovská míra na $\mathbb{C}$.

Říkáme, že spektrální míra $E$ je **kompaktně nesená**, pokud existuje kompaktní množina $K \subset \mathbb{C}$, pro kterou platí $E(\mathbb{C} \setminus K) = 0$

Přitom **borelovskou mírou** rozumíme (komplexní) $\sigma$-aditivní míru $\mu$ definovanou na $\sigma$-algebře $\mathcal{A}$ obsahující borelovské množiny takovou, že pro každou $A \in \mathcal{A}$ existují borelovské množiny $B$ a $C$, pro které platí $B \subset A \subset C$ a $|\mu|(C \setminus B) = 0$.

**Lemma 5.** *Je-li $T \in L(H)$ normální operátor, je $E_T$ kompaktně nesená abstraktní spektrální míra.*

**Lemma 6** (vlastnosti spektrální míry). *Nechť $E$ je abstraktní spektrální míra v Hilbertově prostoru $H$ definovaná na $\sigma$-algebře $\mathcal{A}$. Pak platí:*

(a) *Zobrazení $x \mapsto E_{x,y}$ je lineární pro každé $y \in H$.*
(b) *Zobrazení $y \mapsto E_{x,y}$ je sdruženě lineární pro každé $x \in H$.*
(c) *Pro $x, y \in H$ platí $E_{y,x} = \overline{E_{x,y}}$.*
(d) *Pro každé $x \in H$ je $E_{x,x}$ nezáporná míra.*
(e) *Pro $x, y \in H$ platí $E_{x,y} = \frac{1}{4}(E_{x+y,x+y} - E_{x-y,x-y} + iE_{x+iy,x+iy} - iE_{x-iy,x-iy})$.*
(f) *Pro $x, y \in H$ a $A \in \mathcal{A}$ platí $|E_{x,y}(A)| \leq \sqrt{E_{x,x}(A) \cdot E_{y,y}(A)} \leq \frac{1}{2}(E_{x,x}(A) + E_{y,y}(A))$.*
(g) *Pro každé $x, y \in H$ platí $E_{x+y,x+y} \leq 2(E_{x,x} + E_{y,y})$*
(h) *Pro každé $x, y \in H$ platí $\|E_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.*

**Poznámka.** V definici abstraktní spektrální míry stačí v bodě (vii) předpokládat, že pro každé $x \in H$ je $E_{x,x}$ borelovská míra na $\mathbb{C}$.

**Tvrzení 7.** *Nechť $E$ je abstraktní spektrální míra v separabilním Hilbertově prostoru $H$. Pak pro každou $A \in \mathcal{A}$ existují borelovské množiny $B$ a $C$, pro které platí $B \subset A \subset C$ a $E(C \setminus B) = 0$.*

**Poznámka.** Někdy se spektrální míra definuje jen pro separabilní prostory $H$. Pak se definuje jen na $\sigma$-algebře borelovských množin a vynechává se podmínka (iv). Pro neseparabilní $H$ je třeba použít výše uvedenou definici.

**Definice.** Nechť $E$ je abstraktní spektrální míra v Hilbertově prostoru $H$ definovaná na $\sigma$-algebře $\mathcal{A}$.

- Položme $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A}; E(A) = 0\}$.
- Označme $L^\infty(E)$ prostor všech omezených $\mathcal{A}$-měřitelných funkcí na $\mathcal{C}$, přičemž ztotožňujeme funkce, které se rovnají až na množinu z $\mathcal{N}$ (tj. $E$-**skoro všude**). Uvažujme na $L^\infty(E)$ normu

  $$\|f\| = \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda \in \mathbb{C}} |f(\lambda)| = \inf\{c > 0; \{\lambda \in \mathbb{C}; f(\lambda) > c\} \in \mathcal{N}\}.$$

  Pak $L^\infty(E)$ je komutativní $C^*$-algebra (s bodovým násobením, involuce je definována jako komplexní sdružení).

**Věta 8** (integrál omezené funkce dle spektrální míry). *Je-li $E$ abstraktní spektrální míra v $H$ definovaná na $\sigma$-algebře $\mathcal{A}$ a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je omezená $\mathcal{A}$-měřitelná funkce, pak existuje právě jeden operátor $\Phi_0(f) \in L(H)$, pro který platí*

$$\langle \Phi_0(f)x, y\rangle = \int f \, \mathrm{d}E_{x,y} \qquad x, y \in H.$$

*Dále platí:*

(a) *$\Phi_0$ je izometrický $*$-izomorfismus $C^*$-algebry $L^\infty(E)$ do $L(H)$.*
(b) *Pro každé $f \in L^\infty(E)$ je $\sigma(\Phi_0(f)) = \operatorname{ess\,rng}(f)$.*
(c) *Pro každou $f \in L^\infty(E)$ je operátor $\Phi_0(f)$ normální. Navíc, $\Phi_0(f)$ je samoadjungovaný, právě když $f$ je reálná ($E$-skoro všude) a $\Phi_0(f)$ je nezáporný, právě když $f \geq 0$ $E$-skoro všude.*
(d) *$\|\Phi_0(f)x\| = \sqrt{\int |f|^2 \, \mathrm{d}E_x}$ pro $x \in H$.*
(e) *Je-li $f \in L^\infty(E)$ a $g \in \mathcal{C}(\sigma(\Phi_0(f)))$, pak $\Phi_0(g \circ f) = \tilde{g}(\Phi_0(f))$.*

**Značení:** Operátor $\Phi_0(f)$ z předchozí věty značíme $\int f \, \mathrm{d}E$ a nazýváme **integrálem funkce $f$ podle spektrální míry $E$**.

**Lemma 9.** *Nechť $E$ je abstraktní spektrální mira, $f \in L^\infty(E)$ a $T = \int f \, \mathrm{d}E$. Pak spektrální míru $E_T$ operátoru $T$ lze spočítat pomocí vzorce $E_T(A) = E(f^{-1}(A))$.*

**Důsledek 10** (spektrální rozklad omezeného normálního operátoru). *Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je normální operátor. Pak existuje právě jedna abstraktní spektrální míra, pro kterou $T = \int \mathrm{id} \, \mathrm{d}E$. Navíc je to právě míra $E_T$.*

**Věta 11** (integrál (obecně neomezené) funkce dle spektrální míry). *Nechť $E$ je abstraktní spektrální míra v $H$ definovaná na $\sigma$-algebře $\mathcal{A}$, a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nechť je $\mathcal{A}$-měřitelná funkce. Označme*

$$D(\Phi(f)) = \{x \in H : \int |f|^2 \, \mathrm{d}E_{x,x} < \infty\}.$$

*Pak $D(\Phi(f))$ je hustý lineární podprostor $H$. Navíc existuje jediný operátor $\Phi(f)$ na $H$ s definičním oborem $D(\Phi(f))$, který splňuje*

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int f \, \mathrm{d}E_{x,y}, \qquad x, y \in D(\Phi(f)).$$

*Navíc platí:*

$$\|\Phi(f)x\| = \sqrt{\int |f|^2 \; dE_{x,x}}, \qquad x \in D(\Phi(f)).$$

**Poznámka:** Je-li $f$ omezená, je $D(\Phi(f)) = H$ a $\Phi(f) = \Phi_0(f)$.
**Značení:** Operátor $\Phi(f)$ z předchozí věty značíme $\int f \, \mathrm{d}E$ a nazýváme **integrálem funkce $f$ podle spektrální míry $E$**.

**Věta 12** (vlastnosti $\int f \, \mathrm{d}E$). *Je-li $E$ abstraktní spektrální míra v $H$ a $f, g$ jsou $\mathcal{A}$-měřitelné funkce, pak platí:*

(a) *$\Phi(f) + \Phi(g) \subset \Phi(f + g)$;*
(b) *$\Phi(f)\Phi(g) \subset \Phi(fg)$ a $D(\Phi(f)\Phi(g)) = D(\Phi(g)) \cap D(\Phi(fg))$.*
(c) *$\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$ a $\Phi(f)\Phi(f)^* = \Phi(|f|^2) = \Phi(f)^*\Phi(f)$, speciálně $\Phi(f)$ je* **normální**.
(d) *$\Phi(f)$ je uzavřený operátor.*
(e) *$\Phi(f)$ je spojitý, právě když $f$ je esenciálně omezená, tj. existuje $A \in \mathcal{A}$, že $E(\mathbb{C} \setminus A) = 0$ a $f$ je omezená na $A$.*

**Tvrzení 13** (spektrum $\int f \, \mathrm{d}E$). *Je-li $E$ abstraktní spektrální míra, $f$ $\mathcal{A}$-měřitelná funkce a $T = \int f \, \mathrm{d}E$, pak*

$$\sigma(T) = \operatorname{ess\,rng}(f) := \mathbb{C} \setminus \bigcup \{G \subset \mathbb{C} : G \text{ otevřená }, E(f^{-1}(G)) = 0\}.$$

*Navíc pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ je $\ker(\lambda I - T) = R(E(f^{-1}(\{\lambda\})))$. Speciálně, $\lambda$ je vlastní číslo operátoru $T$, právě když $E(f^{-1}(\lambda)) \neq 0$.*