VI.4 Normální neomezené operátory

Definice. Hustě definovaný uzavřený operátor T na Hilbertově prostoru se nazývá **normální**, jestliže $T^*T = TT^*$.

Lemma 19 (o T^*T). *Nechť T je uzavřený a hustě definovaný operátor na H. Pak platí:*

(a) *$I + T^*T$ je bijekce $D(T^*T)$ na H.*
(b) *Označme B inverzní operátor k $I + T^*T$ a $C = TB$. Pak B a C patří do $L(H)$ a mají normu nejvýš jedna. Navíc, B je nezáporný.*
(c) *T^*T je samoadjungovaný a T je uzávěrem $T|_{D(T^*T)}$.*

Lemma 20. *Nechť T je normální operátor na H. Pak platí:*

(a) *$D(T) = D(T^*)$*
(b) *Pro $x \in D(T)$ platí $\|Tx\| = \|T^*x\|$.*
(c) *Je-li $S \supset T$ normální, pak $S = T$.*

Věta 21 (spektrální rozklad neomezeného normálního operátoru). *Je-li T normální operátor na H, pak existuje právě jedna abstraktní spektrální míra E v H, že $T = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}E$. Tato míra se získá následujícím způsobem: Nechť B je operátor z Lemmatu 19. Pro $j \in \mathbb{N}$ nechť $P_j = \chi_{\widetilde{(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]}}(B)$. Pak TP_j je omezený normální operátor, nechť E^j je jeho spektrální míra a $\mathcal{A}_j$ příslušná σ-algebra. Pak hledaná míra E je rovna*

$$E(A)x = \sum_{j=1}^{\infty} E^j(A)P_j x, \quad x \in H, A \in \mathcal{A} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_j.$$

Důsledek 22. *Nechť T je normální operátor na H. Pak T je omezený, právě když $\sigma(T)$ je omezená množina.*

Důsledek 23. *Nechť E je abstraktní spektrální míra v Hilbertově prostoru H definovaná na σ-algebře $\mathcal{A}$. Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je $\mathcal{A}$-měřitelná funkce a $T = \int f\, \mathrm{d}E$. Pak T je normální operátor a jeho spektrální míra (tj. míra z Věty 21) je obrazem míry E při funkci f (ve smyslu Lemmatu 16).*