

XII.3 Spektrum neomezeného operátoru

Úmluva. V této sekci uvažujeme všechny Banachovy prostory nad \mathbb{C} .

Definice.

- Nechť X je Banachův prostor. **Operátorem na X** budeme rozumět operátor z X do X .
- Nechť T je operátor na X .
 - **Rezolventní množinou** operátoru T rozumíme množinu všech $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které operátor $\lambda I - T$ je prostý, na a $(\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$. Značíme ji $\rho(T)$.
 - **Rezolventou** (nebo **rezolventní funkcí**) operátoru T rozumíme zobrazení

$$\lambda \mapsto R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T).$$

- **Spektr**em operátoru T rozumíme množinu $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Poznámky.

- (1) Pokud T není uzavřený, pak $\rho(T) = \emptyset$ a $\sigma(T) = \mathbb{C}$.
- (2) Rezolventní množina se někdy definuje jiným způsobem. Někdy se požaduje
 - (a) jen aby operátor $\lambda I - T$ byl prostý a na;
 někdy se požaduje,
 - (b) aby operátor $\lambda I - A$ byl prostý, aby měl hustý obor hodnot a inverzní operátor aby byl spojitý.

Je-li T uzavřený, pak všechny tři definice jsou ekvivalentní; pro neuzavřené operátory dávají různé pojmy. Pokud operátor T není uzavřený, ale má uzavřené rozšíření, pak jeho rezolventní množina podle možnosti (b) se rovná rezolventní množině operátoru \overline{T} ; rezolventní množina podle možnosti (a) je s rezolventní množinou \overline{T} disjunktní.

Tvrzení 14 (vlastnosti rezolventy, rezolventní množiny a spektra). *Nechť T je operátor na X .*

- (a) *Nechť $\mu \in \rho(T)$. Pak pro $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|(\mu I - T)^{-1}\|}$ platí $\lambda \in \rho(T)$ a*

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \mu)^n ((\mu I - T)^{-1})^{n+1}.$$

- (b) $\rho(T)$ je otevřená podmnožina \mathbb{C} a $\sigma(T)$ je uzavřená podmnožina \mathbb{C} .
- (c) Rezolventní funkce $\lambda \mapsto (\lambda I - T)^{-1}$ je spojitá na $\rho(T)$.
- (d) Pro každé $f \in X^*$ a každé $x \in X$ je funkce $\lambda \mapsto f((\lambda I - T)^{-1}x)$ holomorfní na $\rho(T)$.

Lemma 15 (prázdné spektrum a T^{-1}). *Je-li T uzavřený operátor na X , pro který platí $\sigma(T) = \emptyset$, pak $T^{-1} \in L(X)$ a $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$.*