XII.4 Operátory na Hilbertově prostoru

Úmluva: Dále budeme uvažovat pouze operátory na komplexním Hilbertově prostoru H. Skalární součin prvků $x, y \in H$ značíme $\langle x, y \rangle$.

Poznámka: Je-li H Hilbertův prostor, pak $H \times H$ je také Hilbertův prostor, pokud skalární součin definujeme vzorcem

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle, \qquad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in H \times H.$$

Definice. Nechť T je hustě definovaný operátor na H.

- Symbolem $D(T^*)$ označme množinu všech $y \in H$, pro které je zobrazení
$$x \mapsto \langle Tx, y \rangle$$
spojité na $D(T)$.
- Pro $y \in D(T^*)$ označme symbolem T^*y jediný prvek H, který splňuje rovnost
$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \text{ pro všechna } x \in D(T).$$

Lemma 16. *Nechť T je hustě definovaný operátor na H. Pak $D(T^*)$ je lineární podprostor H a T^* je operátor na H s definičním oborem $D(T^*)$.*

Poznámka. Nechť T je operátor na H, který není hustě definovaný. Označme $K = \overline{D(T)}$. Pak definice množiny $D(T^*)$ dává smysl. Navíc pro každé $y \in D(T^*)$ existuje právě jedno $z \in K$ splňující $\langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle$ pro $x \in D(T)$. Bylo by možné tedy definovat T^* jako operátor z H do K (což je speciální případ operátorů na H). Označíme-li navíc P ortogonální projekci H na K, pak PT je hustě definovaný operátor na K, $D((PT)^*) = D(T^*) \cap K$ a $(PT)^*$ je zúžením operátoru T^* z předchozí věty na $D((PT)^*)$.

Definice. Operátor T^* se nazývá **adjungovaný operátor k** T.

Tvrzení 17 (základní vlastnosti adjungovaných operátorů).

(a) *Je-li S hustě definovaný a $S \subset T$, pak $T^* \subset S^*$.*
(b) *Je-li $S + T$ hustě definovaný, platí $S^* + T^* \subset (S + T)^*$. Je-li navíc $S \in L(H)$, platí $S^* + T^* = (S + T)^*$.*
(c) *Jsou-li S a ST hustě definované, platí $T^*S^* \subset (ST)^*$. Je-li navíc $S \in L(H)$, platí $T^*S^* = (ST)^*$.*

Tvrzení 18 (o jádru a obrazu). *Pro hustě definovaný operátor T platí* $\mathrm{Ker}(T^*) = R(T)^\perp$.

Lemma 19 (o transformaci grafu). *Definujme $V : H \times H \to H \times H$ předpisem $V(x, y) = (-y, x)$. Pak*

(a) *V je unitární operátor na $H \times H$,*
(b) *$G(T^*) = (V(G(T)))^\perp = V(G(T)^\perp)$ pro hustě definovaný operátor T na H.*

Poznámka: Lemma 19 je velmi užitečný nástroj pro práci s adjungovanými operátory. Tvrzení (b) je stručný zápis ekvivalence

$$z = T^*y \Leftrightarrow (\forall x \in D(T) : (y, z) \perp (-Tx, x)) \Leftrightarrow (\forall x \in D(T) : \langle x, z \rangle = \langle Tx, y \rangle).$$

Lemma 20. *Nechť T je hustě definovaný, prostý a $R(T)$ nechť je hustý. Pak $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Tvrzení 21 (adjungovaný operátor a uzavřenost). *Nechť T je hustě definovaný. Pak platí:*

(a) *Operátor T^* je uzavřený.*
(b) *T má uzavřené rozšíření, právě když T^* je hustě definovaný (pak $\overline{T} = T^{**}$).*
(c) *T je uzavřený, právě když $T = T^{**}$ (implicitně T^* je hustě definovaný).*

Definice. Nechť T je operátor na H.

- Řekneme, že T je **symetrický**, pokud pro každé $x, y \in D(T)$ platí $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.
- Řekneme, že T je **samoadjungovaný**, pokud $T = T^*$.

Poznámky.

(1) Symetrický operátor nemusí být hustě definovaný. Je-li T hustě definovaný, pak T je symetrický, právě když $T \subset T^*$.
(2) Nechť T je operátor na H, který není hustě definovaný. Označme $K = \overline{D(T)}$ a nechť P je ortogonální projekce na K. Pak PT je hustě definovaný operátor na K. Navíc T je symetrický, právě když PT je symetrický.
(3) Samoadjungovaný operátor je vždy hustě definovaný (aby T^* byl definován) a uzavřený (díky Tvrzení 21(a)).

Lemma 22. *Nechť T je samoadjungovaný operátor. Pak T je maximální symetrický (tj. neexistuje vlastní symetrické rozšíření T).*

Poznámka. Hustě definovaný maximální symetrický operátor nemusí být samoadjungovaný. To plyne z poznámek na konci oddílu XII.5.

Tvrzení 23 (další vlastnosti symetrických operátorů). *Nechť T je symetrický hustě definovaný operátor na H. Pak platí:*

(a) *$\overline{T}$ je symetrický.*
(b) *Je-li $D(T) = H$, pak T je omezený a samoadjungovaný.*
(c) *Je-li $R(T)$ hustý, pak T prostý.*
(d) *Je-li $R(T) = H$, pak T je prostý, samoadjungovaný a $T^{-1} \in L(H)$.*
(e) *Je-li T samoadjungovaný a prostý, pak T^{-1} je samoadjungovaný (speciálně hustě definovaný).*

Lemma 24 (o $(\alpha + i\beta)I - S$). *Nechť S je symetrický operátor na H a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pak $\lambda I - S$ je prostý a jeho inverze je spojitá na $R(\lambda I - S)$. Navíc, S je uzavřený, právě když $R(\lambda I - S)$ je uzavřený.*

Věta 25 (spektrum samoadjungovaného operátoru). *Pro každý samoadjungovaný operátor T platí $\emptyset \neq \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Důsledek 26 (charakterizace samoadjungovanosti mezi symetrickými operátory). *Pro hustě definovaný operátor T na H je ekvivalentní:*

(i) *T je samoadjungovaný;*
(ii) *T je symetrický a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$;*
(iii) *T je symetrický a existuje $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pro které $\lambda, \overline{\lambda} \in \rho(T)$.*