XII.5 Symetrické operátory a Cayleyova transformace

Definice. Nechť S je symetrický (ne nutně hustě definovaný) operátor na H. Označme symbolem C_S operátor

$$C_S = (S - iI)(S + iI)^{-1}.$$

Pak C_S je operátor na H, který se nazývá **Cayleyova transformace operátoru** S.

Věta 27 (vlastnosti C_S). *Nechť S je symetrický operátor na H a C_S je jeho Cayleyova transformace. Pak*

(a) *C_S je lineární izometrie $D(C_S) = R(S + iI)$ na $R(C_S) = R(S - iI)$.*
(b) *$I - C_S = 2i(S + iI)^{-1}$; speciálně, operátor $I - C_S$ je prostý a $R(I - C_S) = D(S)$.*
(c) *$S = i(I + C_S)(I - C_S)^{-1}$.*
(d) *C_S je uzavřený $\Leftrightarrow$ S je uzavřený $\Leftrightarrow$ $D(C_S)$ je uzavřený $\Leftrightarrow$ $R(C_S)$ je uzavřený.*

Lemma 28 (o izometrickém operátoru). *Nechť U je libovolný operátor na H, který je izometrií $D(U)$ na $R(U)$. Pak*

(a) *$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ pro všechna $x, y \in D(U)$. Speciálně: U je unitární, právě když je $D(U) = R(U) = H$.*
(b) *$\mathrm{Ker}(I - U) = D(U) \cap (R(I - U))^{\perp}$. Speciálně, je-li $R(I - U)$ hustý v H, je $I - U$ prostý.*

Věta 29 (obraz Cayleyovy transformace). *Nechť U je operátor na H, který je izometrií $D(U)$ na $R(U)$. Předpokládejme, že $I - U$ je prostý. Pak operátor $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$ je symetrický a platí $C_S = U$. Přitom S je hustě definovaný, právě když $R(I - U)$ je hustý.*

Věta 30 (Cayleyova transformace pro samoadjungované operátory).

(a) *Nechť S je symetrický operátor na H. Pak S je samoadjungovaný, právě když C_S je unitární operátor.*
(b) *Nechť U je unitární operátor na H, pro který je $I - U$ prostý. Pak operátor $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$ je samoadjungovaný a platí $C_S = U$.*

Poznámky.

(1) Nechť S a T jsou symetrické operátory na H. Pak $S \subset T$, právě když $C_S \subset C_T$.
(2) Nechť S je hustě definovaný uzavřený symetrický operátor na H. Pak kodimenze podprostorů $D(C_S)$ a $R(C_S)$ (tj. dimenze jejich ortogonálních doplňků) nazýváme **indexy defektu** operátoru S. Pak platí:
   - S je samoadjungovaný, právě když oba indexy defektu jsou nulové.
   - S je maximální symetrický operátor, právě když aspoň jeden z indexů defektu je nulový.
   - S má samoadjungované rozšíření, právě když oba indexy defektu jsou stejné (tj., právě když existuje lineární izometrie $(D(C_S))^{\perp}$ na $(R(C_S))^{\perp}$).
(3) Nechť S je uzavřený symetrický operátor na H, ne nutně hustě definovaný. I v tomto případě lze definovat indexy defektu. Přitom platí:
   - Pokud $D(C_S) = H$ nebo $R(C_S) = H$, pak S je hustě definovaný.

   Tedy i v tomto případě platí první z výše uvedených ekvivalencí. Z toho snadno plyne, že v druhém bodě platí implikace $\Leftarrow$ a ve třetím bodě platí implikace $\Rightarrow$. Jak je to s obrácenými implikacemi, není zřejmé.