XIII. Spektrální míry a spektrální rozklady

Úmluva: V této kapitole budeme uvažovat omezené a neomezené operátory na komplexních Hilbertových prostorech. Tedy, všechny Hilbertovy prostory, které uvažujeme, jsou komplexní, s výjimkami v posledním oddílu.

XIII.1 Měřitelný kalkulus a spektrální míra pro normální omezené operátory

Tvrzení 1 (Lax-Milgram). *Nechť H je Hilbertův prostor a $B : H \times H \to \mathbb{C}$ je zobrazení s následujícími vlastnostmi:*

- *$x \mapsto B(x, y)$ je lineární pro každé $y \in H$.*
- *$y \mapsto B(x, y)$ je sdruženě lineární pro každé $x \in H$.*
- *$\|B\| = \sup\{|B(x, y)|\,; x, y \in B_H\} < \infty$.*

Pak existuje právě jedno $T \in L(H)$ splňující $B(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ pro $x, y \in H$. Navíc $\|T\| = \|B\|$.

Konstrukce spektrální míry normálního operátoru - Krok 1. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť $f \mapsto \tilde{f}(T)$, $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, je spojitý funkční kalkulus pro T. Pro libovolná $x, y \in H$ nechť $E_{x,y}$ je (jednoznačně určená) komplexní Radonova míra na $\sigma(T)$ splňující

$$\left\langle \tilde{f}(T)x, y \right\rangle = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}E_{x,y}, \qquad f \in \mathcal{C}(\sigma(T)).$$

Tvrzení 2 (vlastnosti měr $E_{x,y}$). *Použijeme-li výše definované značení, platí:*

(a) *$x \mapsto E_{x,y}$ je lineární pro každé $y \in H$.*
(b) *$y \mapsto E_{x,y}$ je sdruženě lineární pro každé $x \in H$.*
(c) *$E_{x,x}$ je nezáporná míra pro každé $x \in H$.*
(d) *$\|E_{x,y}\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ pro $x, y \in H$.*
(e) *$E_{x,y} = \frac{1}{4}(E_{x+y,x+y} - E_{x-y,x-y} + iE_{x+iy,x+iy} - iE_{x-iy,x-iy})$ pro $x, y \in H$.*

Měřitelný kalkulus a spektrální míra. Používáme výše zavedené značení.

- Označme $\mathcal{A}$ σ-algebru všech podmnožin $\sigma(T)$, které jsou $E_{x,y}$-měřitelné pro každá $x, y \in H$. (Připomeňme, že množina A je $E_{x,y}$-měřitelná, právě když existují borelovské množiny B, C, pro které platí $B \subset A \subset C$ a $|E_{x,y}|(B \setminus C) = 0$.) Pak $\mathcal{A}$ obsahuje právě ty podmnožiny $\sigma(T)$, které jsou $E_{x,x}$-měřitelné pro každé $x \in H$.
- Nechť $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ je omezená $\mathcal{A}$-měřitelná funkce. Symbolem $\tilde{f}(T)$ budeme značit operátor z $L(H)$ splňující

  $$\left\langle \tilde{f}(T)x, y \right\rangle = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}E_{x,y}, \qquad x, y \in H.$$

  Jeho existence a jednoznačnost plyne z Tvrzení 1. Zobrazení $f \mapsto \tilde{f}(T)$ se nazývá **měřitelný kalkulus** pro T.

- Pro $A \in \mathcal{A}$ označme $E_T(A) = \widetilde{\chi_A}(T)$. Zobrazení $E_T : A \mapsto E_T(A)$ se nazývá **spektrální míra** operátoru T.
- Označme symbolem $\mathcal{N}$ podsystém $\mathcal{A}$ tvořený množinami, které jsou $|E_{x,y}|$-nulové pro každá $x, y \in H$. Pak $\mathcal{N}$ obsahuje právě ty množiny, které jsou $E_{x,x}$-nulové pro každé $x \in H$.
- Symbolem $L^\infty(E_T)$ označme prostor všech omezených $\mathcal{A}$-měřitelných funkcí na $\sigma(T)$, přičemž ztotožňujeme funkce, které se rovnají všude až na množinu z $\mathcal{N}$. Prostor $L^\infty(E_T)$ opatříme normou

$$\|f\| = \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda\in\sigma(T)} |f(\lambda)| = \inf\{c > 0; \{\lambda \in \sigma(T); f(\lambda) > c\} \in \mathcal{N}\}.$$

  Pak $L^\infty(E_T)$ je komutativní C^*-algebra (s bodovým násobením a involucí definovanou jako komplexní sdružení).
- $\tilde{f}(T)$ je definováno právě pro $f \in L^\infty(E_T)$. Navíc, $\tilde{f}(T)$ je pak dobře definováno, tj. $\tilde{f}(T) = \tilde{g}(T)$ v případě, že $f = g$ až na množinu z $\mathcal{N}$.

Lemma 3 (důsledek Luzinovy věty).

(a) *Nechť K je kompaktní metrický prostor a μ je nezáporná konečná borelovská míra na K. Nechť $f : K \to \mathbb{C}$ je omezená μ-měřitelná funkce. Pak existuje (stejně) omezená posloupnost (f_n) v $\mathcal{C}(K)$ splňující $f_n \to f$ μ-skoro všude. Speciálně, existuje omezená borelovská funkce g ns $\sigma(T)$, pro kterou $f = g$ μ-skoro všude.*

(g) *Nechť H je separabilní Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť $f \in L^\infty(E_T)$. Pak existuje (stejně) omezená posloupnost (f_n) v $\mathcal{C}(\sigma(T))$, pro kterou platí $f_n \to f$ až na množinu z $\mathcal{N}$. Speciálně, existuje omezená borelovská funkce g na $\sigma(T)$ splňující $f = g$ až na množinu z $\mathcal{N}$.*

Věta 4 (vlastnosti měřitelného kalkulu). *Nechť H je Hilbertův prostor and $T \in L(H)$ je normální operátor.*

(a) *$f \mapsto \tilde{f}(T)$ je izometrický $*$-izomorfismus $L^\infty(E)$ do $L(H)$.*

(b) *Je-li (f_n) omezená posloupnost v $L^\infty(E)$, která bodově konverguje k funkci f (až na množinu z $\mathcal{N}$), pak $f \in L^\infty(E)$ a navíc*

$$\left\langle \tilde{f}_n(T)x, y \right\rangle \to \left\langle \tilde{f}(T)x, y \right\rangle, \qquad x, y \in H.$$

(c) *$\sigma(\tilde{f}(T)) = \operatorname{ess\,rng}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \forall r > 0 : f^{-1}(U(\lambda, r)) \notin \mathcal{N}\}$ pro $f \in L^\infty(E)$.*

(d) *$\tilde{f}(T)$ je normální operátor pro každou $f \in L^\infty(E)$. Operátor $\tilde{f}(T)$ je samoadjungovaný, právě když f je esenciálně reálně hodnotová (tj. $f(\lambda) \in \mathbb{R}$ až na množinu z $\mathcal{N}$).*

(e) *$\tilde{g}(\tilde{f}(T)) = \widetilde{g \circ f}(T)$, pokud $f \in L^\infty(E)$ a g je spojitá na $\sigma(\tilde{f}(T))$ (viz (c)).*

(f) *Pokud $S \in L(H)$ komutuje s T, pak S komutuje s $\tilde{f}(T)$ pro každou $f \in L^\infty(E)$.*