XIII.3 Spektrální rozklad (neomezeného) samoadjungovaného operátoru

Tvrzení 14 (měřitelný kalkulus jako integrál). *Nechť $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť E_T je jeho spektrální míra a $\mathcal{A}_T$ je σ-algebra, na níž je definovaná. Je-li g omezená $\mathcal{A}_T$-měřitelná funkce, pak $\tilde{g}(T) = \int g \, \mathrm{d}E_T$.*

Lemma 15. *Nechť T je samoadjungovaný operátor na H. Nechť E je spektrální míra operátoru C_T. Pak*

$$T = \int i \frac{1+z}{1-z} \, \mathrm{d}E(z).$$

Lemma 16 (o obrazu spektrální míry). *Nechť F je abstraktní spektrální míra v H definovaná na σ-algebře $\mathcal{A}$ a $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je $\mathcal{A}$-měřitelné zobrazení. Označme*

$$\mathcal{A}' = \{A \subset \mathbb{C} : \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$$

a pro $A \in \mathcal{A}'$ položme

$$E(A) = F(\varphi^{-1}(A)).$$

Pak E je abstraktní spektrální míra v H a pro každou $\mathcal{A}'$-měřitelnou funkci f platí

$$\int f \, \mathrm{d}E = \int f \circ \varphi \, \mathrm{d}F.$$

Věta 17 (spektrální rozklad samoadjungovaného operátoru). *Je-li T samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru H, pak existuje jediná abstraktní spektrální míra E v H taková, že $T = \int \mathrm{id} \, \mathrm{d}E$.*

Tato míra E je obrazem spektrální míry operátoru C_T při borelovském zobrazení $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$.

Důsledek 18. *Nechť T je samoadjungovaný operátor na H. Pak T je omezený, právě když $\sigma(T)$ je omezená množina.*