XIII.5 Doplňky k teorii neomezených operátorů

Tvrzení 24. *Nechť E je abstraktní spektrální míra v Hilbertově prostoru H definovaná na σ-algebře $\mathcal{A}$. Pro $\mathcal{A}$-měřitelnou funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ označme $\Phi(f) = \int f \,\mathrm{d}E$.*

(1) *Nechť $x \in H$. Označme $H_x = \{\Phi(f)x; f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{C})\}$. Pak H_x je (ne nutně uzavřený) podprostor H a zobrazení $U_x : f \mapsto \Phi(f)x$ je lineární izometrie prostoru $L^2(E_{x,x})$ na $\overline{H_x}$.*

(2) *Existuje množina $\Gamma \subset S_H$ s vlastnostmi:*
   - $H_x \perp H_y$ *pro* $x, y \in \Gamma$, $x \neq y$.
   - $\operatorname{span}(\bigcup_{x\in\Gamma} H_x)$ *je hustý podprostor* H.

(3) *Nechť $\Omega = \Gamma \times \mathbb{C}$. Nechť*

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{A \subset \Omega; \forall x \in \Gamma : \{\lambda \in \mathbb{C}; (x, \lambda) \in A\} \in \mathcal{A}\}$$

a

$$\mu(A) = \sum_{x\in\Gamma} E_{x,x}(\{\lambda \in \mathbb{C}; (x, \lambda) \in A\}), \quad A \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Pak $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \mu)$ je prostor s nezápornou mírou. Navíc zobrazení $U : L^2(\mu) \to H$ definované vzorcem

$$U(g) = \sum_{x\in\Gamma} \Phi(\lambda \mapsto g(x, \lambda))x, \quad g \in L^2(\mu)$$

je lineární izometrie $L^2(\mu)$ na H.

(4) *Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je $\mathcal{A}$-měřitelná funkce. Pak $\Phi(f) = UM_{\tilde{f}}U^*$, kde*

$$\tilde{f}(x, \lambda) = f(\lambda), \quad (x, \lambda) \in \Omega$$

a $M_{\tilde{f}}$ je operátor na $L^2(\mu)$ daný vzorcem

$$M_{\tilde{f}}g = \tilde{f} \cdot g, \quad g \in D(M_{\tilde{f}}) = \{g \in L^2(\mu); \tilde{f} \cdot g \in L^2(\mu)\}.$$

Věta 25 (diagonalizace normálního operátoru). *Nechť T je normální operátor na Hilbertově prostoru H. Pak T je unitárně ekvivalentní vhodnému operátoru násobení. Tj. existuje nezáporná míra μ, unitární operátor $U : L^2(\mu) \to H$ a μ-měřitelná funkce f, že $T = UM_fU^*$, kde M_f je definován jako v Tvrzení 24. Navíc platí:*

(a) *Je-li T samoadjungovaný, f lze zvolit reálně hodnotovou.*
(b) *Je-li T omezený, f lze zvolit omezenou.*
(c) *Je-li H separabilní, μ lze zvolit σ-konečnou.*

Věta 26 (jiné vyjádření spektrálního rozkladu samoadjungovaného operátoru). *Nechť T je samoadjungovaný operátor na H a E jeho spektrální míra (z Věty 17). Pak $E(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) = 0$. Pro $\lambda \in \mathbb{R}$ položme $E_\lambda = E((-\infty, \lambda])$. Pak platí:*

(a) *E_λ je ortogonální projekce pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$.*
(b) *$E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_{\min\{\lambda,\mu\}}$ pro $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
(c) *$\lim\limits_{\mu\to\lambda+} E_\mu x = E_\lambda x$ pro každé $x \in H$ a $\lambda \in \mathbb{R}$.*
(d) *Pokud λ není vlastní číslo T, pak $\lim\limits_{\mu\to\lambda-} E_\mu x = E_\lambda x$ pro každé $x \in H$.*
(e) *Pokud λ je vlastní číslo T, pak vzorec $P_\lambda x = \lim\limits_{\mu\to\lambda-} E_\mu x$, $x \in H$, definuje ortogonální projekci, pro kterou $E_\lambda - P_\lambda$ je též ortogonální projekce a navíc $R(E_\lambda - P_\lambda) = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$.*
(f) *$\lim\limits_{\mu\to-\infty} E_\mu x = 0$ a $\lim\limits_{\mu\to+\infty} E_\mu x = x$ pro každé $x \in H$.*
(g) *Reálné číslo λ patří do $\rho(T)$, právě když zobrazení $\mu \mapsto E_\mu$ je konstantní na nějakém okolí λ.*

Věta 27 (samoadjungované operátory na reálném Hilbertově prostoru). *Nechť H je reálný Hilbertův prostor a T operátor na H. Pak lze definovat T^* stejně jako v komplexním případě (viz oddíl XII.4). Nechť H_C je hilbertovská komplexifikace H, tj. prostor $H_C = H + iH = \{x + iy; x, y \in H\}$ opatřený skalárním součinem*

$$\langle x + iy, u + iv\rangle = \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle + i\langle y, u\rangle - i\langle x, v\rangle, \quad x + iy, u + iv \in H_C.$$

Definujme operátor T_C na H_C předpisem

$$T_C(x + iy) = T(x) + iT(y), \quad x + iy \in D(T_C) = D(T) + iD(T).$$

Pak platí

(a) *Je-li T hustě definovaný, pak T_C je též hustě definovaný a $(T_C)^* = (T^*)_C$.*
(b) *Je-li $T \in L(H)$, pak $T_C \in L(H_C)$ a $\|T_C\| = \|T\|$.*
(c) *Je-li T samoadjungovaný, pak T_C je též samoadjungovaný a navíc pro $\lambda \in \mathbb{R}$ platí*
$$\lambda I - T \text{ je invertibilní v } L(H) \Leftrightarrow \lambda I_C - T_C \text{ je invertibilní v } L(H_C).$$
(d) *Nechť T je samoadjungovaný a E je spektrální míra T_C, $\mathcal{A}$ nechť je příslušná σ-algebra. Pak vzorec*
$$E_R(A) = E(A)|_H, \quad A \in \mathcal{A}$$
definuje "reálnou spektrální míru" na $\mathbb{R}$ a platí $T = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}E_R$.

Důsledek 28. *Nechť H je reálný Hilbertův prostor.*

(i) *Je-li $T \in L(H)$ samoadjungovaný, pak $\sigma(T)$ je neprázdná kompaktní podmnožina $\mathbb{R}$. Navíc pro reálnou spojitou funkci f na $\sigma(T)$ lze definovat $\tilde{f}(T)$ (jako restrikci $\tilde{f}(T_C)$ na H). Přiřazení $f \mapsto \tilde{f}(T)$ splňuje podmínky (a)–(e) z Věty XI.14 (po zřejmých úpravách).*
(ii) *Je-li $T \in L(H)$, lze definovat operátor $|T| = \sqrt{T^*T}$ (jako v oddílu XII.1). Věta XII.6 tedy platí pro reálné prostory.*
(iii) *Je-li $T \in L(H)$ kompaktní samoadjungovaný, platí tvrzení Věty III.38 (s tím, že čísla λ_k jsou reálná).*
(iv) *Je-li $T \in L(H)$ kompaktní, existuje jeho Schmidtova reprezentace (viz oddíl III.7).*