X.2 Spektrum prvku algebry a jeho vlastnosti

Definice. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$.

- **Spektrem** prvku x rozumíme množinu
  $$(\ \sigma_A(x) = \ )\quad \sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ není invertibilní v } A\}.$$
- **Rezolventní množinou** prvku x rozumíme množinu $\rho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.
- **Rezolventou** prvku x rozumíme funkci
  $$R(\lambda, x) := (\lambda e - x)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(x).$$

Pokud A je Banachova algebra bez jednotky a $x \in A$, pak **spektrem** prvku x rozumíme množinu
$$(\ \sigma_A(x) = \ )\quad \sigma(x) = \sigma_{A^+}((x, 0)).$$
Pokud A je Banachova algebra (s jednotkou či bez), pak **spektrálním poloměrem** prvku $x \in A$ rozumíme číslo
$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Poznámky:

(1) Spektrum prvku je čistě algebraický pojem, nezávisí na normě Banachovy algebry.
(2) Pokud A nemá jednotku, pak $0 \in \sigma_A(x)$ pro každé $x \in A$.
(3) Pokud A má jednotku, pak $\sigma_{A^+}((x, 0)) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$ pro každé $x \in A$.

Tvrzení 8 (vlastnosti rezolventy). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a $a \in A$. Pak platí:*

(i) *$\rho(a)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$.*
(ii) *Zobrazení $\lambda \mapsto R(\lambda, a)$ je spojité na $\rho(a)$.*
(iii) *Pro $\lambda, \mu \in \rho(a)$ platí*
$$R(\mu, a) - R(\lambda, a) = -(\mu - \lambda) R(\mu, a) R(\lambda, a).$$
Speciálně platí, že prvky $R(\mu, a)$ a $R(\lambda, a)$ komutují.
(iv) *Funkce $\lambda \mapsto \varphi(R(\lambda, a))$ je holomorfní na $\rho(a)$ pro každé $\varphi \in A^*$.*
(v) *Pro $|\lambda| > \|a\|$ platí $\lambda \in \rho(a)$ a*
$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$
(vi) *Pro $\lambda \in \rho(a)$ platí $aR(\lambda, a) = R(\lambda, a)a$.*

Věta 9 (neprázdnost spektra). *Nechť A je Banachova algebra. Pak pro každé $x \in A$ je $\sigma(x)$ neprázdná kompaktní podmnožina $\mathbb{C}$.*

Poznámka. $\{a \in A : \sigma(a) \subset G\}$ je otevřená pro $G \subset \mathbb{C}$ otevřenou (tj. „$\sigma : A \to \mathcal{K}(\mathbb{C})$ je shora polospojité mnohoznačné zobrazení A do množiny neprázdných kompaktních podmnožin $\mathbb{C}$“).

Věta 10 (Gelfand-Mazur). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Pak A je těleso (tj. všechny nenulové prvky A jsou invertibilní, neboli $G(A) = A \setminus \{0\}$), právě když je A izometricky izomorfní Banachově algebře $\mathbb{C}$.*

Definice. Nechť A je Banachova algebra, $p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda^j$ je polynom s komplexními koeficienty a $a \in A$.

- Má-li A jednotku e, definujeme $p(a) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j a^j$ (kde $a^0 = e$).
- Nemá-li A jednotku a $p(0) = 0$ (tj. $\alpha_0 = 0$), definujeme $p(a) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a^j$.

Lemma 11. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a p, q jsou polynomy s komplexními koeficienty. Pak pro každé $a \in A$ platí $(pq)(a) = p(a)q(a)$.*

Lemma 12 (o spektru a polynomu). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou, je polynom s komplexními koeficienty a $a \in A$. Pak platí:*

(a) *$p(a) \in G(A)$, právě když nulové body polynomu leží v $\rho(a)$.*
(b) *$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.*

Tvrzení (b) *platí též v případě, že A nemá jednotku a $p(0) = 0$.*

Věta 13 (o spektrálním poloměru). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a $a \in A$. Pak platí:*

(a) $r(a) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
(b) *Vzorec z Tvrzení 8(v) platí i pro $|\lambda| > r(a)$, přičemž řada vpravo konverguje absolutně.*

Důsledek 14. *Je-li A Banachova algebra s jednotkou a $a \in A$ splňuje $r(a) < 1$, pak $(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ (řada konverguje absolutně).*

Tvrzení 15. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e. Nechť B je uzavřená podalgebra A obsahující e a $x \in B$. Pak platí:*

(a) $\partial \sigma_B(x) \subset \sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$.
(b) *Nechť G je komponenta souvislosti $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$. Pak buď $G \subset \sigma_B(x)$ nebo $G \cap \sigma_B(x) = \emptyset$.*
(c) *Je-li $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$ souvislá množina, pak $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

Důsledek 16. *Nechť A je Banachova algebra, B její uzavřená podalgebra a $x \in B$. Pak platí (a)–(c) z Tvrzení 15, pokud v nich všude $\sigma_A(x)$ a $\sigma_B(x)$ nahradíme $\sigma_A(x) \cup \{0\}$ a $\sigma_B(x) \cup \{0\}$.*