X.3 Holomorfní kalkulus

Tvrzení 17 (křivkový integrál s hodnotami v Banachově prostoru). *Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je spojitá po částech $\mathcal{C}^1$ křivka (tj., φ je spojité zobrazení a existuje dělení intervalu $[a, b]$ takové, že na každém z dělících intervalů je derivace φ' spojitá a má v krajních bodech vlastní jednostranné limity). Nechť dále X je Banachův prostor a $f : \langle\varphi\rangle \to X$ je spojité zobrazení (kde $\langle\varphi\rangle = \varphi([a, b])$ je obraz křivky φ). Pak integrál*

$$\int_\varphi f = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

existuje jako Bochnerův.

Poznámky:

(1) Stejně jako v komplexní analýze budeme uvažovat i integrál přes cykly (tj. formální součty uzavřených po částech $\mathcal{C}^1$ křivek).

(2) Pro výpočet křivkového integrálu a práci s ním budeme používat slabou verzi integrálu, tj. ekvivalenci

$$x = \int_\varphi f \Leftrightarrow \forall x^* \in X^* : x^*(x) = \int_\varphi x^* \circ f.$$

(3) Pro definici uvedeného křivkového integrálu a práci s ním není nezbytná teorie Bochnerova integrálu. Integrál existuje i v Riemannově smyslu. Přičemž Riemannův integrál funkce $g : [a, b] \to X$ je roven prvku $x \in X$, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b \text{ dělení intervalu } [a, b] :$$
$$\max_{1\le j\le k}(t_j - t_{j-1}) < \delta \Rightarrow \forall u_1 \in [t_0, t_1], \ldots, u_k \in [t_{k-1}, t_k] : \left\| x - \sum_{j=1}^{k} g(u_j)(t_j - t_{j-1}) \right\| < \varepsilon.$$

Lze ukázat, že v našem případě Riemannův integrál existuje a navíc platí ekvivalence z předchozího bodu. Tento přístup se též vyskytuje v literatuře.

Definice. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e, $x \in A$ a f buď funkce holomorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, která obsahuje $\sigma(x)$. Nechť Γ je „cyklus obíhající $\sigma(x)$ v Ω jedenkrát v kladném smyslu“(tj. Γ je cyklus v $\Omega \setminus \sigma(x)$, $\operatorname{ind}_\Gamma z$ nabývá jen hodnot 0 nebo 1, přičemž pro $z \in \sigma(x)$ je $\operatorname{ind}_\Gamma z = 1$ a pro $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$). Pak definujeme prvek $\tilde{f}(x) \in A$ vzorcem

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}\, d\lambda.$$

Poznámky:

(1) Z komplexní analýzy víme, že cyklus s uvedenými vlastnostmi vždy existuje.
(2) Prvek $\tilde{f}(x)$ je dobře definovaný díky Tvrzení 17.
(3) Z Cauchyovy věty plyne, že hodnota $\tilde{f}(x)$ nezávisí na konkrétní volbě cyklu Γ.
(4) Zobrazení $f \mapsto \tilde{f}(x)$ se nazývá **holomorfním funkčním kalkulem**, nebo též **Dunfordovým funkčním kalkulem**.
(5) Místo $\tilde{f}(x)$ se často píše jen $f(x)$.

Věta 18 (vlastnosti holomorfního kalkulu). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e, $x \in A$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina obsahující $\sigma(x)$.*

(a) *Zobrazení $f \mapsto \tilde{f}(x)$ je algebraický homomorfismus (komutativní) algebry s jednotkou $H(\Omega)$ do algebry A.*
(b) $\tilde{id}(x) = x$ a $\tilde{1}(x) = e$, *kde* $id(\lambda) = \lambda$ a $1(\lambda) = 1$ *pro* $\lambda \in \Omega$.
(c) *Je-li p polynom, pak $\tilde{p}(x) = p(x)$, kde $p(x)$ má význam jako v předchozím oddílu.*
(d) *Je-li $\lambda \in \Omega$, pak $\tilde{f}(\lambda e) = f(\lambda)e$.*
(e) *Pokud $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně na Ω (kde $f_n \in H(\Omega)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$), pak $\tilde{f}_n(x) \to \tilde{f}(x)$ v A.*
(f) *$\tilde{f}(x) \in G(A)$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(x)$.*
(g) $\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$.
(h) $\widetilde{(g \circ f)}(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$ *pro* $f \in H(\Omega)$, $g \in H(\Omega')$, $\Omega' \supset f(\sigma(x))$.
(i) *Pokud $y \in A$ komutuje s x (tj. $yx = xy$), pak y komutuje též s $\tilde{f}(x)$ pro každou $f \in H(\Omega)$.*

Poznámka. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$.

(1) Pokud f a g jsou dvě holomorfní funkce na okolí $\sigma(x)$, které se na nějakém okolí $\sigma(x)$ rovnají, pak $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$.
(2) Může se stát, že f a g se rovnají na $\sigma(x)$ a přitom $\tilde{f}(x) \neq \tilde{g}(x)$.
(3) Přiřazení $f \mapsto \tilde{f}(x)$ nemusí být prosté. Tj. rovnost $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$ neimplikuje, že se f a g shodují na nějakém okolí $\sigma(x)$.
(4) Pokud $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$, pak $f|_{\sigma(x)} = g|_{\sigma(x)}$.
(5) Holomorfní kalkulus lze definovat i na algebře bez jednotky následovně: Nechť A je algebra bez jednotky, $x \in A$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina obsahující $\sigma(x)$. Uvažujme algebru A^+ a ztotožněme A s podalgebrou $\{(a, 0); a \in A\} \subset A^+$. Pak pro každé $f \in H(\Omega)$ můžeme definovat $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x, 0) \in A^+$. Přitom $\tilde{f}(x) \in A$, právě když $f(0) = 0$ (připomeňme, že $0 \in \sigma(x) \subset \Omega$).