XI. C*-algebry a spojitý funkční kalkulus

Poznámka: Tato kapitola navazuje na předchozí, všechny prostory opět uvažujeme komplexní.

XI.1 Algebry s involucí a C*-algebry – základní vlastnosti

Definice. Nechť A je Banachova algebra.

- **Involucí** na A rozumíme zobrazení $x \mapsto x^*$ algebry A do sebe takové, že pro všechna $x, y \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ platí:

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \qquad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, \qquad (xy)^* = y^* x^* \qquad \text{a} \qquad x^{**} = x.$$

- Banachova algebra A s involucí se nazývá C^*-**algebra**, pokud pro každé $x \in A$ platí
$$\|x^* x\| = \|x\|^2.$$
- Je-li A Banachova algebra s involucí a $x \in A$, pak prvek x se nazývá **samoadjungovaný** (neboli **hermiteovský**), pokud $x^* = x$; **normální**, pokud $x^* x = x x^*$.

Poznámky.

(1) Nechť A je Banachova algebra s involucí. Pak $e \in A$ je levá jednotka, právě když e^* je pravá jednotka. Tedy, má-li A levou jednotku nebo pravou jednotku, pak má jednotku a tato jednotka je samoadjungovaná.

(2) Nechť A je Banachova algebra s involucí. Pokud pro každé $x \in A$ platí

$$\|x^* x\| \geq \|x\|^2,$$

pak A je C^*-algebra.

(3) Nechť A je C^*-algebra. Zobrazení $x \mapsto x^*$ je sdruženě lineární izometrie A na A. Pro každé $x \in A$ tedy platí

$$\|x^* x\| = \|x x^*\| = \|x\|^2 = \|x^*\|^2.$$

(4) Nechť A je netriviální C^*-algebra s jednotkou e. Pak $\|e\| = 1$.

Příklady 1.

(1) *Těleso komplexních čísel je komutativní C^*-algebra, pokud involuci definujeme předpisem $\lambda^* = \overline{\lambda}$ pro $\lambda \in \mathbb{C}$.*

(2) *Algebra $\mathcal{C}_0(T)$, kde T je lokálně kompaktní prostor, je komutativní C^*-algebra, pokud involuci definujeme předpisem $f^*(t) = \overline{f(t)}$ pro $t \in T$.*

(3) *Maticová algebra M_n je C^*-algebra, pokud involuci definujeme předpisem*

$$\left((a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \right)^* = (\overline{a_{ji}})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} .$$

(4) *Je-li H Hilbertův prostor, pak algebry $L(H)$ a $K(H)$ jsou C^*-algebry, pokud involucí T^* rozumíme adjungovaný operátor k T.*

(5) *Na algebře $L^1(\mathbb{R}^n)$ lze involuci definovat buď předpisem $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$; nebo předpisem $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ani s jednou z těchto involucí není $L^1(\mathbb{R}^n)$ C^*-algebra.*

Tvrzení 2 (vlastnosti algeber s involucí). *Nechť A je Banachova algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí:*

(a) *Prvky $x + x^*$, $i(x - x^*)$, x^*x jsou samoadjungované.*

(b) *Existují jednoznačně určené samoadjungované prvky $u, v \in A$ takové, že $x = u + iv$. Navíc, x je normální, právě když $uv = vu$.*

(c) *Má-li A jednotku, pak $x \in G(A)$, právě když $x^* \in G(A)$ (potom platí $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$).*

(d) $\sigma(x^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Tvrzení 3 (o spektrálním poloměru a normě normálního prvku). *Je-li A C^*-algebra a $a \in A$ je normální, pak $r(a) = \|a\|$.*

Důsledek 4. *Nechť A je algebra s involucí. Pak na A existuje nejvýše jedna norma $\|\cdot\|$, pro kterou je $(A, \|\cdot\|)$ C^*-algebra.*

Tvrzení 5 (přidání jednotky). *Nechť A je Banachova algebra s involucí.*

(a) *A^+ je rovněž Banachova algebra s involucí, pokud involuci definujeme předpisem $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$ pro $(a, \lambda) \in A^+$.*

(b) *Je-li A C^*-algebra, pak i A^+ je C^*-algebra, pokud involuci definujeme jako v bodě (a) a normu na A^+ definujeme vzorcem*

$$\|(a, \lambda)\| = \max\{|\lambda|, \sup\{\|ab + \lambda b\|; b \in A, \|b\| \le 1\}\}.$$

(c) *Je-li A C^*-algebra bez jednotky, pak normu z (b) lze vyjádřit ve tvaru*

$$\|(a, \lambda)\| = \sup\{\|ab + \lambda b\|; b \in A, \|b\| \le 1\}.$$

Poznámka: Norma na A^+ z Tvrzení 5(b) se liší od normy z Tvrzení X.2(b). Z Důsledku 4 plyne, že definice z Tvrzení 5(b) je jediná možná.