XI.2 $*$-homomorfismy a Gelfandova transformace C^*-algeber

Definice. Nechť A a B jsou C^*-algebry a $h : B \to A$. Říkáme, že h je $*$-**homomorfismus**, je-li to homomorfismus Banachových algeber splňující navíc $h(x^*) = h(x)^*$ pro každé $x \in B$.

Tvrzení 6 (o automatické spojitosti $*$-homomorfismu). *Nechť A a B jsou C^*-algebry a $h : B \to A$ je $*$-homomorfismus B do A. Pak $\|h\| \leq 1$.*

Příklad 7. *Nechť K, L jsou kompaktní Hausdorffovy prostory a $\varphi : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ je $*$-homomorphismus splňující $\varphi(1) = 1$. Pak existuje spojité zobrazení $\alpha : L \to K$ takové, že $\varphi(f) = f \circ \alpha$ pro $f \in \mathcal{C}(K)$. Pokud φ je navíc prosté, pak $\alpha(L) = K$, a tedy φ je izometrie $\mathcal{C}(K)$ do $\mathcal{C}(L)$.*

Tvrzení 8. *Nechť A je C^*-algebra. Pak pro $a \in A$ platí:*

(a) *Je-li a samoadjungovaný, pak $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

(b) *Má-li A jednotku a $a^* = a^{-1}$ (tj. a je* **unitární***), pak*

$$\sigma(a) \subset \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

(c) *Pro $h \in \Delta(A)$ a $a \in A$ platí $h(a^*) = \overline{h(a)}$ (tj. h je $*$-homomorfismus, je-li to komplexní homomorfismus).*

Věta 9 (Gelfand-Naimark). *Nechť A je komutativní C^*-algebra. Pak Γ je izometrický $*$-izomorfismus C^*-algebry A na C^*-algebru $C_0(\Delta(A))$ (mimo jiné tedy platí identita $\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}$ na A).*

Speciálně, A má jednotku, právě když $\Delta(A)$ je kompaktní.

Důsledek 10. *Nechť A a B jsou komutativní C^*-algebry. Pak A a B jsou $*$-izomorfní, právě když $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.*

Důsledek 11. *Nechť A a B jsou C^*-algebry a $h : B \to A$ je prostý $*$-homomorfismus B do A. Pak h je izometrie A do B.*