XI.3 Spojitý funkční kalkulus pro C^*-algebry

Tvrzení 12. *Nechť A je C^*-algebra a $B \subset A$ její C^*-podalgebra.*

(a) *Pro každé $x \in B$ platí $\sigma_B(x) \cup \{0\} = \sigma_A(x) \cup \{0\}$.*

(b) *Pokud A má jednotku e a navíc $e \in B$, pak pro každé $x \in B$ platí $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$. Speciálně, $G(B) = B \cap G(A)$.*

Theorem 13 (Fuglede). *Nechť A je C^*-algebra a $x \in A$ je normální prvek. Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak komutuje také s x^*.*

Věta 14 (spojitý funkční kalkulus pro C^*-algebry s jednotkou). *Nechť A je C^*-algebra s jednotkou e a $x \in A$ je normální prvek. Nechť B je uzavřená podalgebra algebry A generovaná množinou $\{e, x, x^*\}$. Pak platí:*

- *B je komutativní C^*-algebra s jednotkou e.*
- *Zobrazení $h : \varphi \mapsto \varphi(x)$ je homeomorfismus $\Delta(B)$ na $\sigma(x)$.*

Nechť $\Gamma : B \to \mathcal{C}(\Delta(B))$ je Gelfandova transformace algebry B. Pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ označme

$$\tilde{f}(x) = \Gamma^{-1}(f \circ h).$$

Pak zobrazení $\Phi : f \mapsto \tilde{f}(x)$, které se nazývá **spojitý funkční kalkulus pro prvek** *x, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický $*$-izomorfismus C^*-algebry $\mathcal{C}(\sigma(x))$ na B.*

(b) *$\tilde{id}(x) = x$, $\tilde{1}(x) = e$.*

(c) *Je-li p polynom, pak $\tilde{p}(x) = p(x)$.*

(d) *$\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$.*

(e) *Jestliže $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje s $\tilde{f}(x)$ pro každé $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$.*

Navíc, Φ je jediné zobrazení splňující první dvě podmínky.

Poznámka: Dle Tvrzení 12 je v předchozí větě $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$, proto píšeme jen $\sigma(x)$.

Věta 15 (spojitý funkční kalkulus pro obecné C^*-algebry). *Nechť A je C^*-algebra (s jednotkou či bez) a $x \in A$ je normální prvek. Nechť B je uzavřená podalgebra algebry A generovaná množinou $\{x, x^*\}$. Pak platí:*

- *B je komutativní C^* algebra.*
- *Zobrazení $h : \varphi \mapsto \varphi(x)$ je homeomorfismus $\Delta(B) \cup \{0\}$ na $\sigma(x) \cup \{0\}$.*

Nechť $\Gamma : B \to \mathcal{C}_0(\Delta(B))$ je Gelfandova transformace algebry B. Pro $f \in \mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$ označme

$$\tilde{f}(x) = \Gamma^{-1}(f \circ h).$$

Pak zobrazení $\Phi : f \mapsto \tilde{f}(x)$, které se nazývá **spojitý funkční kalkulus pro prvek** *x, má následující vlastnosti:*

(a) *Φ je izometrický $*$-izomorfismus C^*-algebry $\mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$ na B.*
(b) *$\tilde{id}(x) = x$.*
(c) *Je-li p polynom splňující $p(0) = 0$, pak $\tilde{p}(x) = p(x)$.*
(d) *$\sigma(\tilde{f}(x)) \cup \{0\} = f(\sigma(x) \setminus \{0\}) \cup \{0\}$ pro $f \in \mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$.*
(e) *Jestliže $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje s $\tilde{f}(x)$ pro každé $f \in \mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$.*

Navíc, Φ je jediné zobrazení splňující první dvě podmínky.

Poznámky:

(1) Dle Tvrzení 12 je v předchozí větě $\sigma_A(x) \cup \{0\} = \sigma_B(x) \cup \{0\}$, a tedy i $\sigma_A(x) \setminus \{0\} = \sigma_B(x) \setminus \{0\}$. Proto všude píšeme jen $\sigma(x)$.
(2) Algebra B ve Větě 15 má jednotku, právě když $\sigma(x) \setminus \{0\}$ je kompaktní. Tato jednotka může být různá od jednotky algebry A, pokud ta ji má. Jsou tyto možnosti:
   (a) $0 \notin \sigma_B(x) = \sigma_A(x)$. Pak A má jednotku a tato jednotka patří do B, x je invertibilní (v A i v B).
   (b) $0 \in \sigma_A(x) \setminus \sigma_B(x)$. Pak B má jednotku, která není jednotkou v A (buď A nemá jednotku, nebo má jednotku, která nepatří do B), a x je invertibilní v B (nikoli v A).
(3) Pokud $\sigma(x) \setminus \{0\}$ je kompaktní, pak $\mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$ je totéž co $\mathcal{C}(\sigma(x) \setminus \{0\})$.
(4) Pokud $0 \in \sigma(x)$ (což nastává vždy, když $\sigma(x) \setminus \{0\}$ není kompaktní, ale nejen tehdy), pak lze ztotožnit $\mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\}) = \{f \in \mathcal{C}(\sigma(x)); f(0) = 0\}$.