XI.4 Význačné typy prvků C^*-algeber

Poznámka: V tomto oddílu definujeme několik speciálních typů prvků C^*-algeber a ukážeme, jakou roli hrají v základních příkladech C^*-algeber. Budeme používat následující značení:

- A ... obecná C^*-algebra;
- H ... komplexní Hilbertův prostor;
- $L(H)$ ... C^*-algebra omezených lineárních operátorů na H (s operátorovou normou, operací skládání a involucí definovanou jako adjungovaný operátor);
- Ω ... Hausdorffův lokálně kompaktní prostor;
- $C_0(\Omega)$ ... C^*-algebra spojitých funkcí na Ω s limitou 0 v nekonečnu (se supremovou normou, operací násobení a involucí definovanou jako komplexní sdružení).

Připomenutí: Prvek $x \in A$ je **samoadjungovaný**, pokud $x^* = x$. Prvek $x \in A$ je **normální**, pokud $x^*x = xx^*$.

Tvrzení 16.

(a) *Funkce $f \in C_0(\Omega)$ je samoadjungovaná, právě když je reálná. Každá funkce $f \in C_0(\Omega)$ je normální.*
(b) *Operátor $T \in L(H)$ je samoadjungovaný, právě když pro $x, y \in H$ platí $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$.*

Připomenutí: Nechť A má jednotku e. Prvek $x \in A$ se nazývá **unitární**, pokud $x^*x = xx^* = e$.

Tvrzení 17.

(a) *Každý unitární prvek je normální.*
(b) *V algebře $C_0(\Omega)$ existuje unitární prvek, právě když Ω je kompaktní. Funkce $f \in C_0(\Omega)$ je unitární, právě když pro každé $t \in \Omega$ platí $|f(t)| = 1$.*
(c) *Operátor $T \in L(H)$ je unitární, právě když T je izometrie H na H.*

Tvrzení 18 (charakterizace unitárních operátorů). *Nechť H a K jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H, K)$. Uvažme následující podmínky:*

(i) *T je unitární (tj. $T^*T = I_H$ a $TT^* = I_K$).*
(ii) *T je izometrie H na K.*
(iii) *T je izometrie H do K.*
(iv) *$\langle Tx, Ty \rangle_K = \langle x, y \rangle_H$ for $x, y \in H$.*

Pak (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Jestliže T je na, jsou všechny podmínky ekvivalentní.

Definice.

- Prvek $x \in A$ se nazývá **projekce**, pokud $x^* = x = x^2$.
- Dvě projekce $x, y \in A$ se nazývají **navzájem kolmé (ortogonální)**, pokud $xy = 0$.

Tvrzení 19.

(a) *Funkce $f \in C_0(\Omega)$ je projekce, právě když nabývá jen hodnot 0 a 1, tj. právě když $f = \chi_U$, kde $U \subset \Omega$ je otevřená kompaktní podmnožina.*
(b) *Dvě projekce $\chi_U, \chi_V \in C_0(\Omega)$ jsou navzájem kolmé, právě když $U \cap V = \emptyset$.*

Tvrzení 20 (charakterizace ortogonálních projekcí). *Nechť $P \in L(H)$ splňuje $P^2 = P$ (tj. P je projekce jakožto lineární operátor). Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *P je* **ortogonální projekce**, *tj.* $\operatorname{Ker} P \perp R(P)$.
(ii) *$P = P^*$ (tj. P je projekce jakožto prvek C^*-algebry $L(H)$).*
(iii) *P je normální.*
(iv) *$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ pro každé $x \in H$.*
(v) $\|P\| \leq 1$.

Dále, jsou-li $P, Q \in L(H)$ dvě ortogonální projekce, pak P a Q jsou navzájem kolmé, právě když $R(P) \perp R(Q)$.

Poznámka: K Tvrzení 20 lze přidat ještě následující ekvivalentní podmínku:

(v) $\langle Px, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$.

Implikace (iv)⇒(vi) je zřejmá, implikace (vi)⇒(ii) plyne z Tvrzení XII.5(a).

Definice. Prvek $x \in A$ se nazývá **částečná izometrie**, pokud jsou prvky x^*x a xx^* projekce (ne nutně stejné).

Tvrzení 21.

(a) *Nechť $x \in A$. Pak:*

$$x \text{ je částečná izometrie} \iff x^*x \text{ je projekce} \\ \iff xx^* \text{ je projekce} \iff x = xx^*x$$

(b) *Funkce $f \in C_0(\Omega)$ je částečná izometrie, právě když $|f|$ nabývá pouze hodnot 0 nebo 1, tj. právě když existuje $U \subset \Omega$ kompaktní otevřená množina taková, že $|f| = 1$ na U a $f = 0$ na $\Omega \setminus U$.*
(c) *Operátor $T \in L(H)$ je částečná izometrie, právě když existuje uzavřený podprostor $Y \subset\subset H$ takový, že $T|_Y$ je izometrie (Y do H) a $T|_{Y^\perp} = 0$.*