

## II.4. Symetrické operátory a Cayleyova transformace.

Nechť  $S$  je symetrický operátor na  $H$ , tj. Označme symbolem  $C_S$  operátor

$$C_S = (S - iI)(S + iI)^{-1}.$$

Pak  $C_S$  je operátor na  $H$ , který se nazývá **Cayleova transformace operátoru  $S$** .

**Věta 18** (vlastnosti  $C_S$ ). *Nechť  $S$  je symetrický a  $U = C_S$  je jeho Cayleyova transformace. Pak*

- $U$  je lineární izometrie  $D(U) = R(S + iI)$  na  $R(U) = R(S - iI)$ .
- $I - U = 2i(S + iI)^{-1}$ ; speciálně, operátor  $I - U$  je prostý a  $R(I - U) = D(S)$ .
- $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$ .
- $U$  je uzavřený  $\Leftrightarrow S$  je uzavřený  $\Leftrightarrow D(U)$  je uzavřený  $\Leftrightarrow R(U)$  je uzavřený.

**Lemma 19** (o izometrickém operátoru). *Nechť  $U$  je libovolný operátor na  $H$ , který je izometrií  $D(U)$  na  $R(U)$ . Pak*

- $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$  pro všechna  $x, y \in D(U)$ . Speciálně:  $U$  je unitární, právě když je  $D(U) = R(U) = H$ .
- Je-li  $R(I - U)$  hustý v  $H$ , je  $I - U$  prostý.

**Věta 20** (charakterizace obrazu Cayleyovy transformace). *Nechť  $U$  je operátor na  $H$ , který je izometrií  $D(U)$  na  $R(U)$ . Předpokládejme, že  $I - U$  je prostý a  $R(I - U)$  je hustý. Pak operátor  $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$  je symetrický a platí  $C_S = U$ .*

### Poznámky

- Ve Větě 20 lze vynechat předpoklad, že  $I - U$  je prostý, protože plyne z ostatních předpokladů (díky Lemmatu 19(b)).
- Věty 18 a 20 lze formulovat i pro operátory, které nejsou hustě definované. Pokud za symetrický operátor prohlásíme operátor  $S$ , který splňuje  $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$  pro všechna  $x, y \in D(S)$ , pak Věta 18 platí beze změny a Věta 20 platí, i pokud vynecháme předpoklad hustoty  $R(I - U)$ .

**Věta 21** (Cayleova transformace pro samoadjungované operátory).

- Nechť  $S$  je symetrický operátor na  $H$ . Pak  $S$  je samoadjungovaný, právě když  $C_S$  je unitární operátor.
- Nechť  $U$  je unitární operátor na  $H$ , pro který je  $I - U$  prostý. Pak operátor  $S = i(I + U)(I - U)^{-1}$  je samoadjungovaný a platí  $C_S = U$ .

### Poznámky.

- Nechť  $S$  a  $T$  jsou symetrické operátory na  $H$ . Pak  $S \subset T$ , právě když  $C_S \subset C_T$ .
- Nechť  $S$  je uzavřený symetrický operátor na  $H$ . Pak kodimenze podprostorů  $D(C_S)$  a  $R(C_S)$  nazýváme **indexy defektu** operátoru  $T$ . Pak platí:
  - $T$  je samoadjungovaný, právě když oba indexy defektu jsou nulové.
  - $T$  je maximální symetrický operátor, právě když aspoň jeden z indexů defektu je nulový.
  - $T$  má samoadjungované rozšíření, právě když oba indexy defektu jsou stejné.