

I. NAJDĚTE VŠECHNA ŘEŠENÍ DIFERENČNÍCH ROVNIC (S POČÁTEČNÍMI PODMÍNKAMI)

1.  $y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 0$     2.  $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0$
3.  $y(n+2) - 6y(n+1) + 13y(n) = 0, y(1) = 0$
4.  $y(n+2) - 2y(n+1) - 3y(n) = 0, y(1) = 2, y(2) = 1$
5.  $y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0, y(1) = y(2) = 1$     6.  $y(n+4) + 6y(n+2) + 9y(n) = 0$
7.  $y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = \cos n$     8.  $y(n+3) - y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = n + 2^n$
9.  $y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = \sin n + \sin 2n$     10.  $8y(n+3) + y(n) = 3n + 1/2^n$
11.  $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = n^2, y(1) = 3, y(2) = 2.$
12.  $y(n+2) - y(n) = 17, y(1) = y(2) = 0.$

- VÝSLEDKY A NÁVODY.    1.  $y(n) = (a+bn) \cdot (-2)^n$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ )    2.  $y(n) = a + b \cdot 2^n$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ )    3.  $y(n) = \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{13})^n \cdot (2 \cos(n \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}) - 3 \sin(n \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}))$  ( $a \in \mathbf{R}$ )    4.  $y(n) = \frac{1}{4}(3^n - 5 \cdot (-1)^n)$
5.  $y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$     6.  $(\sqrt{3})^n ((a+bn) \cos \frac{n\pi}{2} + (c+dn) \sin \frac{n\pi}{2})$  ( $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ )    7.  $y(n) = \frac{2 \sin^2 1 \cos 1 - 1 - \cos 1}{8 \sin^2 1 \cos 1 - 1 - 4 \sin^2 1 - \cos 1} \cos n + \frac{\sin^3 1}{8 \sin^2 1 \cos 1 - 1 - 4 \sin^2 1 - \cos 1} \sin n + (\sqrt{2})^n (a \cos \frac{n\pi}{4} + b \sin \frac{n\pi}{4})$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ )
8.  $y(n) = 2^{n-1} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + a + b(\sqrt{2})^n + c(-\sqrt{2})^n$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}$ )
9.  $y(n) = \frac{1}{2} (\frac{3 \cos 1 + 3 + 4 \sin^2 1 \cos 1}{9 + 6 \sin^2 1 + 9 \cos 1 + 8 \sin^2 1 \cos 1} \sin n - \frac{\sin 1 (4 \sin^2 1 + 5)}{9 + 6 \sin^2 1 + 9 \cos 1 + 8 \sin^2 1 \cos 1} \cos n) + \frac{1}{2} (\frac{3 \cos 2 + 3 + 4 \sin^2 2 \cos 2}{9 + 6 \sin^2 2 + 9 \cos 2 + 8 \sin^2 2 \cos 2} \sin 2n - \frac{\sin 2 (4 \sin^2 2 + 5)}{9 + 6 \sin^2 2 + 9 \cos 2 + 8 \sin^2 2 \cos 2} \cos 2n) + a \cdot (-1)^n + b \cdot (-2)^n$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ )
10.  $y(n) = \frac{1}{3}n - \frac{8}{9} + \frac{1}{2^{n+1}} + a \cdot (-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2^n} (b \cos \frac{n\pi}{3} + c \sin \frac{n\pi}{3})$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}$ )    11.  $y(n) = 5 \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{13}{6}n + 1$     12.  $y(n) = \frac{17}{2}n - \frac{17}{4} \cdot (-1)^n - \frac{51}{4}$

II. ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

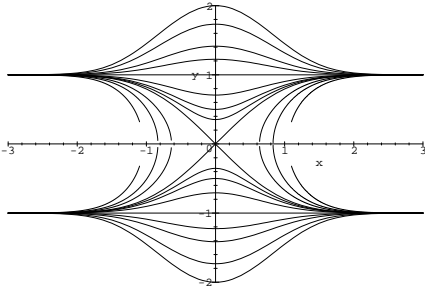
1. Nalezněte maximální řešení rovnice  $y' = y$  procházející bodem  $[0, 1]$ .
2. Pro diferenciální rovnici  $yy' + xy^2 = x$  nalezněte
  - (a) všechna maximální řešení,    (b) maximální řešení procházející bodem  $[1, 0]$ .
3. Pro diferenciální rovnici  $y' = \frac{y^2}{x^2}$  nalezněte
  - (a) všechna maximální řešení,    (b) maximální řešení procházející bodem  $[1, \frac{1}{2}]$ ,
  - (c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.
4. Pro diferenciální rovnici  $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$  nalezněte
  - (a) všechna maximální řešení,    (b) maximální řešení procházející bodem  $[0, 1]$ .
5. Nalezněte řešení rovnice  $y' = \sqrt[5]{y^2}$ , které splňuje  $y(-2) = -\frac{3}{5}$  a  $y(0) = 1$ .
6. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice  $y' = \frac{\cos x}{e^y}$ . Určete množinu všech bodů v  $\mathbb{R}^2$ , kterými prochází právě jedno řešení definované na celém  $\mathbb{R}$ .
7. Řešte rovnici  $y'(2 - e^x) = -3e^x \tan y \cos^2 y$ . Pro která  $A$  existuje řešení s vlastností
 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = A?$$

NAJDĚTE VŠECHNA MAXIMÁLNÍ ŘEŠENÍ NÁSLEDUJÍCÍCH ROVNIC

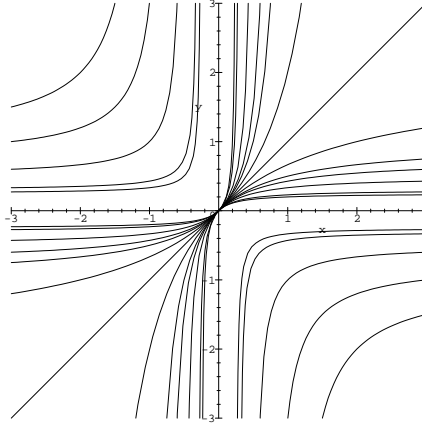
8.  $yy' = \frac{1-2x}{y}$     9.  $xy' + y = y^2$     10.  $y' = 10^{x+y}$     11.  $e^{-y}(1 + y') = 1$
12.  $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0, x \in (-1, 1)$  (\*na zbylých intervalech)    13.  $y' \sin x = y \ln y, y(\frac{\pi}{2}) = 1$
14.  $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, y(0) = 1$     15.  $y - xy' = b(1 + x^2y'), y(1) = 1$  ( $b \in \mathbf{R}$ )

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.**  $y(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . **2.** (a) singulární řešení  $y_0^1 = 1$  na  $\mathbb{R}$ ,  $y_0^2 = -1$  na  $\mathbb{R}$ ;  $y_1^1(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}$  na  $\mathbb{R}$ ,  $y_1^2(x) = -\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}$  na  $\mathbb{R}$ ;  $y_c^1(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ ,  $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$ ,  $y_c^2(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ ,  $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$ ,  $y_c^3(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ ,  $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$ ,  $y_c^4(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ ,  $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$  pro  $c > 1$ ;  $y_c^1(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$  na  $\mathbb{R}$  a  $y_c^2(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$  na  $\mathbb{R}$  pro  $c < 0$  a  $c \in (0, 1)$ . (b) Takové řešení neexistuje. **3.** (a)  $y_0^1 = 0$  na  $(0, +\infty)$ ,  $y_0^1 = 0$  na  $(-\infty, 0)$ ; další řešení dána vzorečkem  $y_c^j(x) = \frac{x}{1-cx}$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $j = 1, 2, 3$  definována na intervalech: pro  $c > 0$   $y_c^1$  na  $(-\infty, 0)$ ,  $y_c^2$  na  $(0, \frac{1}{c})$ ,  $y_c^3$  na  $(\frac{1}{c}, +\infty)$ ; pro  $c < 0$   $y_c^1$  na  $(-\infty, \frac{1}{c})$ ,  $y_c^2$  na  $(\frac{1}{c}, 0)$ ,  $y_c^3$  na  $(0, +\infty)$ . (b)  $y_{-1}^3(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $x \in (0, \infty)$ . (c) Omezená jsou  $y_0^1, y_0^2, y_c^1$  pro  $c > 0$ ,  $y_c^3$  pro  $c < 0$ . **4.** (a)  $y_c^1(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2} \log(1+x^2))$ ,  $x \in (\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$ ,  $y_c^2(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2} \log(1+x^2))$ ,  $x \in (-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, -\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1})$  pro  $c \geq \frac{\pi}{2}$ ;  $y_c(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2} \log(1+x^2))$ ,  $x \in (-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$  pro  $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . (b)  $y_{\frac{\pi}{4}}(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log(1+x^2))$ ,  $x \in (-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1})$ . **5.** Takové řešení neexistuje. Všechna maximální řešení jsou:  $y_s = 0$  na  $\mathbb{R}$ ;  $y_{s,c} = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, c] \\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (c, +\infty) \end{cases}$  pro  $c \in \mathbb{R}$ ;  $y_{c,s} = \begin{cases} 0 & x \in (c, +\infty] \\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \end{cases}$  pro  $c \in \mathbb{R}$ ;  
 $y_{c,d} = \begin{cases} (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \\ 0 & x \in [c, d] \\ (\frac{3}{5}(x-d))^{\frac{5}{3}} & x \in (d, +\infty) \end{cases}$  pro  $c, d \in \mathbb{R}$ ,  $c \leq d$ . **6.**  $y_c = \log(\sin x + c)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , pro  $c > 1$ ;  
 $y_c^k = \log(\sin x + c)$ ,  $x \in (2k\pi - \arcsin c, (2k+1)\pi + \arcsin c)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , pro  $c \in (-1, 1]$ ;  $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y > \log(\sin x + 1) \text{ nebo } \sin x = -1\}$ . **7.**  $y_{a,b,k}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(a(e^x - 2)^3) + k\pi & x \in [\log 2, +\infty) \\ \operatorname{arctg}(b(e^x - 2)^3) + k\pi & x \in (-\infty, \log 2) \end{cases}$   
pro  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $k \in \mathbb{Z}$ . Hledanou množinou je interval  $(-\pi, \pi)$ . **8.**  $y_c = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , pro  $c < -\frac{1}{4}$ ;  $y_{-1/4}^{1,2} = -\sqrt[3]{3} \cdot (x - \frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$ ,  $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ ; nebo  $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$ ;  $y_c^{1,2,3} = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$ ,  $x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$ , nebo  $x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$ , nebo  $x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \infty)$ , pro  $c > -\frac{1}{4}$ . **9.**  $y_0 = 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y_\infty = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y_c^{1,2} = \frac{1}{1-cx}$ ,  $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$  nebo  $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$ , pro  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . **10.**  $y_c = -\log_{10}(c - 10^x)$ ,  $x \in (-\infty, \log_{10} c)$ , pro  $c > 0$ . **11.**  $y_\infty = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y_c^1 = -\log(1 + e^{x-c})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , pro  $c \in \mathbb{R}$ ;  $y_c^2 = -\log(1 - e^{x-c})$ ,  $x \in (-\infty, -c)$ , pro  $c \in \mathbb{R}$ . **12.**  $y_{-\frac{3}{2}\pi} = -1$ ,  $x \in (-1, 1)$ ;  $y_{\frac{\pi}{2}} = 1$ ,  $x \in (-1, 1)$ ;  $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (-1, -\sin c) \\ -1 & x \in [-\sin c, 1) \end{cases}$   
pro  $c \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$ ;  $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (\sin c, 1) \\ 1 & x \in [-1, \sin c) \end{cases}$ , pro  $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $y_{-\frac{\pi}{2}} = -x$ ,  $x \in (-1, 1)$ . **13.**  $y_0 = 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y_c^k = e^{c \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ ,  $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , pro  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Řešení rovnice s počáteční podmínkou je  $y_0$ . **14.**  $y_0 = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y_\infty^{1,2} = -\frac{1}{x}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$ ;  $y_c^{1,2} = \frac{x+c}{1-cx}$ ,  $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$  nebo  $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$ . Řešení rovnice s počáteční podmínkou je  $y_1^1$ . **15.** Pro  $b = 0$ :  $y_c = cx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , pro  $c \in \mathbb{R}$ . Řešení rovnice s počáteční podmínkou je  $y_1$ . Pro  $b \neq 0$ :  $y_0 = b$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y_c^{1,2} = b + \frac{cx}{1+bx}$ ,  $x \in (-\infty, -\frac{1}{b})$  nebo  $x \in (-\frac{1}{b}, \infty)$ . Řešení rovnice s počáteční podmínkou je  $y_0$ , pokud  $b = 1$ ; neexistuje, pokud  $b = -1$ ;  $y_{\frac{1-b}{1+b}}^1$ , pokud  $b < -1$ ;  $y_{\frac{1-b}{1+b}}^2$ , pokud  $b \in (-1, 1) \cup (1, \infty)$ .

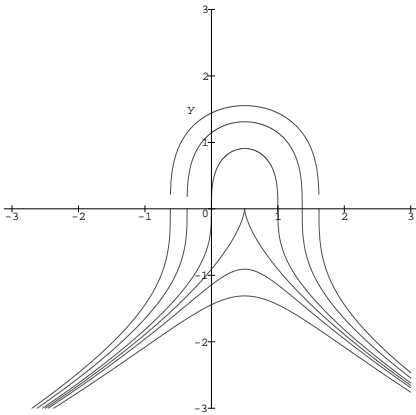
2.



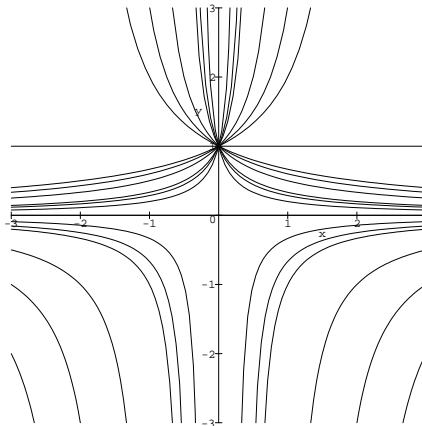
3.



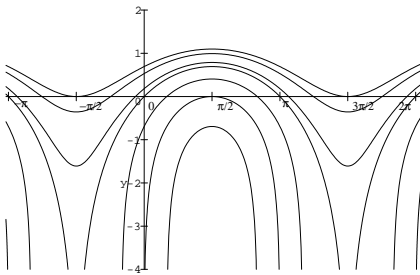
8.



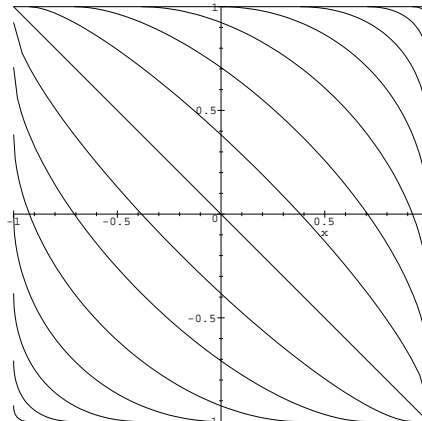
9.



6.



12.



### III. NĚKTERÉ TYPY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC,

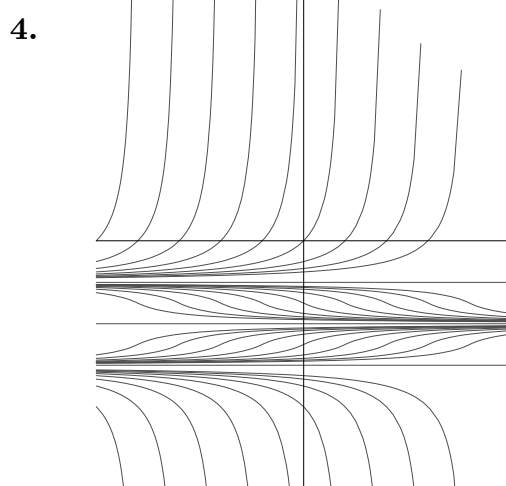
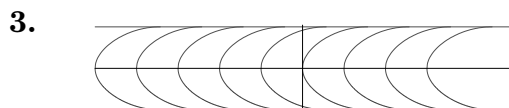
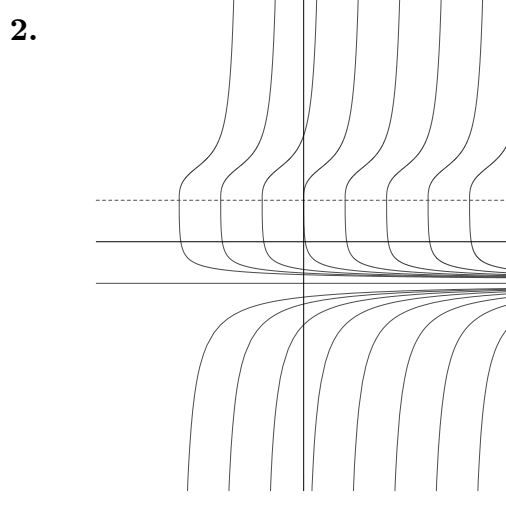
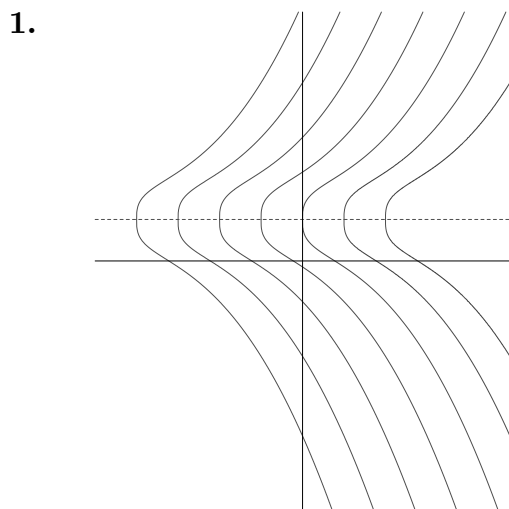
KTERÉ LZE PŘEVÉST NA ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

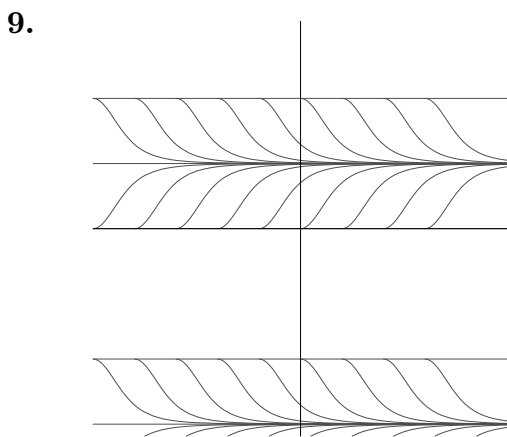
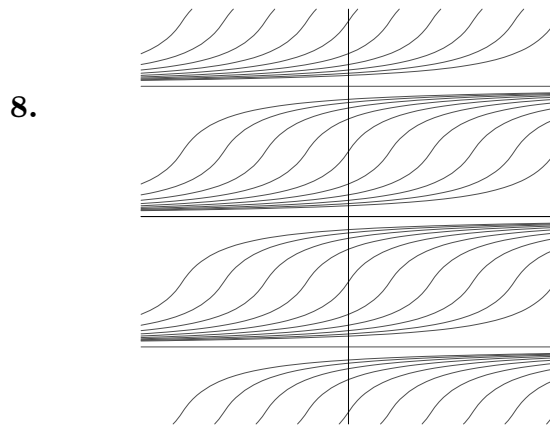
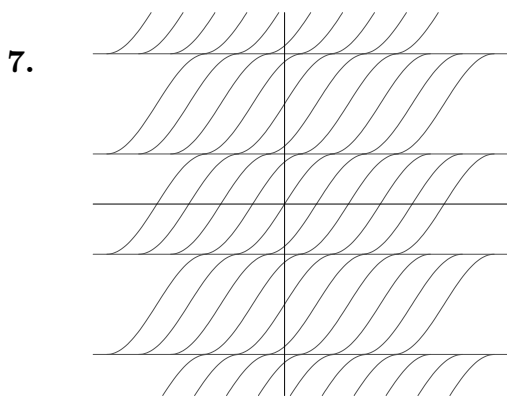
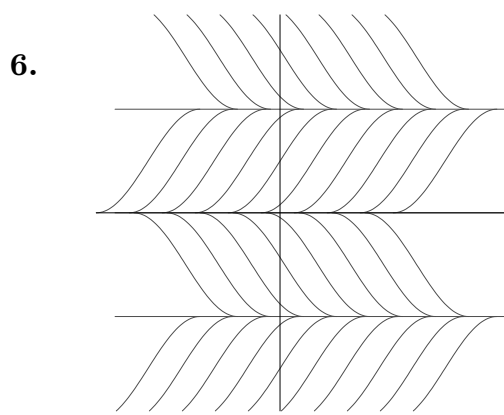
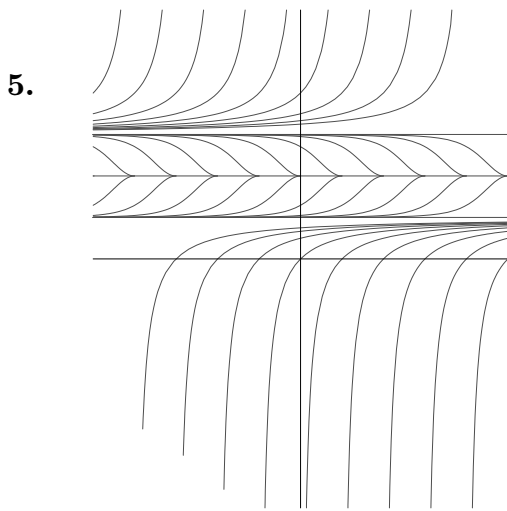
1.  $y' = \cos(x - y)$    2.  $y' = \sin(x + y)$    3.  $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$    4.  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$    5.  $xy' = y \log \frac{y}{x}$   
 6.  $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$    7.  $y^2 + x^2 y' = xy y'$    8.  $xy' - y = \sqrt{y^2 + x^2}$    9.  $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$    10.  $y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$   
 11.  $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$    12.  $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x+1)}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** Substituce  $y = x - z$ ; řešení  $y(x) = x - 2k\pi$ ,  $x \in \mathbf{R}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ );  $y(x) = x - 2 \operatorname{arccotg}(-x - c) - 2k\pi$ ,  $x \in \mathbf{R}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ,  $c \in \mathbf{R}$ ). **2.** Substituce  $y = z - x$ ; řešení  $y(x) = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $x \in \mathbf{R}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ),  $y(x) = \begin{cases} -x - 2 \operatorname{arctg}(1 + \frac{2}{x+c}) + 2k\pi & x \in (-\infty, c) \\ -x - \pi + 2k\pi & x = -c \\ -x - 2 \operatorname{arctg}(1 + \frac{2}{x+c}) - \pi + 2k\pi & x \in (-c, \infty) \end{cases}$  ( $c \in \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ). V příkladech **3.-8.** použijte substituci  $y = xz$ . **3.**  $y(x) = -x$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$ ;  $y(x) = 2x$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$ ;  $y(x) = x \frac{2+kx^3}{1-kx^3}$  na intervalech  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{k}})$ ,  $(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, \infty)$  pro  $k > 0$  a na intervalech  $(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{k}})$ ,  $(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, 0)$  nebo  $(0, \infty)$  pro  $k < 0$ . **4.**  $y(x) = 2x\sqrt{\log|x|+c}$  na  $(-\infty, -e^{-c})$  nebo  $(e^{-c}, \infty)$ ;  $y(x) = -2x\sqrt{\log|x|+c}$  na  $(-\infty, -e^{-c})$  nebo  $(e^{-c}, \infty)$ . **5.**  $y(x) = ex$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$ ;  $y(x) = xe^{1+kx}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$  ( $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ). **6.**  $y(x) = -x \log(-\log|x| - c)$ ,  $x \in (-e^{-c}, 0)$  nebo  $x \in (0, e^{-c})$  ( $c \in \mathbf{R}$ ). **7.**  $y(x) = 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ;  $y(x) = kx^2$ ,  $x \in (-\infty, \frac{1}{k})$  nebo  $x \in (\frac{1}{k}, +\infty)$  ( $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ). **8.**  $y(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{1}{2k}$ ,  $x \in (0, \infty)$  ( $k > 0$ );  $y(x) = \frac{k}{2} - \frac{1}{2k}x^2$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  ( $k > 0$ ). **9.-11.** substitucí  $x = t + a$ ,  $y = z + b$  pro vhodná  $a, b$  převést na předchozí typ. **12.** substitucí  $y^2 = z$  převést na předchozí typ.

IV. NAČRTNĚTE GRAF ŘEŠENÍ, ANIŽ EXPLICITNĚ VYŘEŠÍTE ROVNICI

- 1.**  $y' = \frac{y^2+1}{y-1}$    **2.**  $y' = \frac{y^3+1}{y-1}$    **3.**  $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$    **4.**  $y' = (y+1)(y+2)(y+3)$   
**5.**  $y' = (y-1)^2\sqrt[3]{y-2}(y-3)$    **6.**  $y' = \sqrt[3]{\sin y}$    **7.**  $y' = \sqrt{|\cos y|}$    **8.**  $y' = \sin^2 y$   
**9.**  $y' = \cos y \cdot \sqrt{\sin y}$






---

V. LINEÁRNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

1.  $y' = \frac{2y}{x}$     2.  $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$     3.  $y' = \frac{y}{x} - 1$     4.  $y'x = y + x^2$     5.  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$   
 6.  $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$     7.  $xy' + y = \log x + 1$     8.  $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$  ( $a \in \mathbf{R}$ )  
 9.  $(2x+1)y' + y = x$     10.  $y' - y \operatorname{tg} x = \cotg x$     11.  $y' + y \cos x = \sin 2x$     12.  $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. 1.  $y = cx^2$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . 2.  $y = x^4 + cx^2$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . 3.  $y = -x \log|x| + cx$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . 4.  $y = x^2 + cx$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . 5.  $y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{c}{2x^2}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . 6.  $y = -\frac{\cos 2x}{2 \cos x} + \frac{c}{\cos x}$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . Pro  $c = -1/2$  lze lepit, tím dostaneme řešení  $y(x) = -\cos x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . 7.  $y = \log x + \frac{c}{x}$ ,  $x \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . 8. Pro  $a = 0$ :  $y = \frac{\log|x|}{x} + \frac{c}{x}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbf{R}$ ; pro  $a \neq 0$ :  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \left( \frac{1}{|a|} \log \frac{1+\sin \arctg \frac{x}{a}}{1-\sin \arctg \frac{x}{a}} + c \right)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . 9.  $y = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{c}{\sqrt{|2x+1|}}$ ,  $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$  nebo  $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . Pro  $c = 0$  lze lepit, dostaneme řešení  $y(x) = \frac{1}{3}(x-1)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . 10.  $y = 1 + \frac{1}{2 \cos x} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{c}{\cos x}$ ,  $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . 11.  $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . 12.  $y = x^2 e^{-x} + \frac{c}{x} e^{-x}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbf{R}$ .

### EXAKTNÍ ROVNICE A BERNOULLIOVY ROVNICE – METODY ŘEŠENÍ

Uvažujme rovnici tvaru

$$(*) \quad y' f(x, y) + g(x, y) = 0.$$

Jestliže existuje funkce  $F$  třídy  $C^1$  taková, že  $\frac{\partial F}{\partial y} = f$  a  $\frac{\partial F}{\partial x} = g$ , pak řešení rovnice (\*) splňují  $F(x, y(x)) = c$  pro nějakou konstantu  $c \in \mathbf{R}$ . (Takovým rovnicím říkáme **exaktní**.)

**Větička.** Necht  $f$  a  $g$  jsou dvě funkce třídy  $C^1$  na otevřeném obdélníku  $(a, b) \times (c, d)$ . Pak existuje funkce  $F$  na  $(a, b) \times (c, d)$ , pro kterou  $f = \frac{\partial F}{\partial y}$  a  $g = \frac{\partial F}{\partial x}$ , právě když  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$  na  $(a, b) \times (c, d)$ .

Není-li rovnice (\*) exaktní, lze ji převést na exaktní vynásobením jistou funkcí (tzv. **integračním faktorem**). V některých speciálních případech můžeme tento integrační faktor jednoduše nalézt:

- Pokud  $\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f(x, y)}$  nezávisí na  $y$ , pak pro rovnici (\*) existuje integrační faktor, který je funkcí  $x$ .
- Pokud  $\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{g(x, y)}$  nezávisí na  $x$ , pak existuje integrační faktor, který je funkcí  $y$ .

**Bernoulliovy rovnice** jsou rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

kde  $p, q$  jsou funkce spojité na zadaném intervalu a  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ .

Metody řešení:

(1) Hledáme řešení ve tvaru  $y(x) = z(x)^{1/(1-\alpha)}$ , kde  $z(x)$  je nová neznámá funkce. Tím dostaneme lineární rovnici prvního řádu.

(2) Rovnici vydělíme  $y^\alpha$  a pak vynásobíme integračním faktorem  $e^{(1-\alpha)P(x)}$ , kde  $P$  je primitivní funkce k  $p$ .

### VI. EXAKTNÍ ROVNICE, BERNOULLIOVY ROVNICE

- $2xyy' + y^2 = 0$
- $(x + 2y)y' + y + 3x^2 = 0$
- $3xy^2y' + 2x + y^3 = 0$
- $4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} + 2x + (x^4e^{x+y} + 2y)y' = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
- $2x \sin y + y^3e^x + (x^2 \cos y + 3y^2e^x)y' = 0$
- $\frac{1}{2}y^2 + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$
- $1 + (1 + xy)e^{xy} + (1 + x^2e^{xy})y' = 0$
- $2x \cos y + 3x^2y + (x^3 - x^2 \sin y - y)y' = 0$ ,  $y(0) = 2$
- $3x^2 + 4xy + (2y + 2x^2)y' = 0$ ,  $y(0) = 1$
- $3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$ ,  $y(2) = 1$
- $ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x + (xe^{xy} \cos 2x - 3)y' = 0$ ,  $y(0) = 0$
- $xy' + y = y^2 \log x$
- $y' + 2xy = 2x^3y^3$
- $y' + \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = 0$ ,  $y(1) = \frac{1}{2}$ .
- $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$
- $8xy' - y = -\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$
- $x^2y' + 2x^3y = y^2(1 + 2x^2)$

VÝSLEDKY A NÁVODY. (Výsledky jsou uvedeny v implicitním tvaru a bez definičních oborů – v některých případech je explicitní tvar řešení i tvar definičního oboru zřejmý, jindy nelze jednoduše explicitně vyjádřit.) **1.**  $xy^2 = c$  **2.**  $xy + y^2 + x^3 = c$  **3.**  $xy^3 + x^2 = c$  **4.**  $x^4 e^{x+y} + x^2 + y^2 = 1$   
**5.**  $x^2 \sin y + y^3 e^x = c$  **6.**  $\frac{1}{2}y^2 e^x + ye^{2x} = c$  (integrační faktor  $e^x$ ) **7.**  $x + y + e^{xy} = c$  **8.**  
 $x^3 y + x^2 \cos y - \frac{1}{2}y^2 = 2$  **9.**  $x^3 + y^2 + 2x^2 y^2 = 1$  **10.**  $x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 = 10$  (integrační faktor  $x$ ) **11.**  
 $e^{xy} \cos 2x - 3y + x^2 = 1$  **12.**  $y(x) = \frac{1}{1 + \log x + cx}$  **13.**  $y^2 = -\frac{1}{x^2 - \frac{1}{2} + 2ce^{-x^2}}$  **14.**  $y(x) = \frac{1}{-1 + 3e^{1 - \frac{1}{x}}}$ ,  
 $x \in (\frac{1}{1 + \log 3}, +\infty)$  **15.**  $y^3 = x^3 + cx^2$  **16.**  $y^4 = \sqrt{x+1} + c\sqrt{|x|}$  **17.**  $\frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{x} + 2e^{2x} \int \frac{e^{-2x}}{x} dx$

### VII. LINEÁRNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

**1.**  $y'' + 4y' + 4y = 0$  **2.**  $y'' - 3y' + 2y = 0$  **3.**  $y'' - 6y' + 13y = 0$  **4.**  $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$   
**5.**  $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$  **6.**  $y'' - 2y' + 5y = \cos x$  **7.**  $y''' + y'' = x$  **8.**  $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$   
**9.**  $y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x$  **10.**  $4y''' + y' = 3e^x + 2 \sin \frac{x}{2}$  **11.**  $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$   
**12.**  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + x + 1}$  **13.**  $y'' + y = \operatorname{tg} x$  **14.**  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$  **15.**  $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.**  $y = ce^{-2x} + dx e^{-2x}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . **2.**  $y = ce^x + de^{2x}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . **3.**  
 $y = e^{3x}(c \cos 2x + d \sin 2x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . **4.**  $y = a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x + cx \cos \sqrt{3}x + dx \sin \sqrt{3}x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .  
**5.**  $y = \frac{1}{5}e^{4x} + ce^{-x} + de^{3x}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . **6.**  $y = \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x + e^x(c \cos 2x + d \sin 2x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . **7.**  
 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + a + bx + ce^{-x}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . **8.**  $y = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + a + be^{-x} + ce^{2x}$ ,  
 $x \in \mathbf{R}$ . **9.**  $y = -\frac{1}{20} \sin 2x - \frac{3}{20} \cos 2x - \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x + ce^{-x} + de^{-2x}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . **10.**  
 $y = \frac{3}{5}e^x - x \sin \frac{x}{2} + a + b \cos \frac{x}{2} + c \sin \frac{x}{2}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . **11.**  $y = e^x(1 + e^{2x}) \operatorname{arctg} e^x + ce^x + de^{-x}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .  
**12.**  $y = e^x \cdot \left( c + dx - \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) + \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . **13.**  $y = -\cos x \log \frac{1 + \sin x}{|\cos x|} +$   
 $c \cos x + d \sin x$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . **14.**  $y = e^x \cdot (c + dx + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin \frac{x}{2})$ ,  
 $x \in (-2, 2)$ . **15.**  $y = -e^x \arcsin e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \log \frac{1 - \sqrt{1 - e^{2x}}}{1 + \sqrt{1 - e^{2x}}} + ce^x + de^{2x}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$ .

### EULEROVY ROVNICE – METODY ŘEŠENÍ

**Eulerovy rovnice** jsou rovnice tvaru  $x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$ , kde  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$  jsou konstanty a  $f$  je funkce spojitá na zadaném intervalu  $(\alpha, \beta)$ . Je-li funkce  $f$  nulová, mluvíme o homogenní rovnici.

Postup řešení:

- (1) Řešíme zvlášť na intervalu  $(\alpha, \beta) \cap (0, +\infty)$  a na  $(\alpha, \beta) \cap (-\infty, 0)$ . Nakonec si rozmyslíme, kdy lze řešení nalepit v 0.
- (2) Jde o lineární rovnici. Je tedy možné řešit nejprve homogenní rovnici a pak hledat partikulární řešení. Množina řešení homogenní rovnice (na  $(-\infty, 0)$  nebo na  $(0, +\infty)$ ) je vektorový prostor dimenze  $n$ .
- (3) Pro řešení homogenní rovnice (tj. pro hledání fundamentálního systému) na intervalu  $(0, +\infty)$  jsou dva možné postupy:
  - (a) Provedeme substituci „ $x = e^t$ “, tj. zavedeme novou neznámou funkci  $z(t) = y(e^t)$  (hledáme řešení ve tvaru  $y(x) = z(\log x)$ ). Tím dostaneme lineární rovnici s konstantními koeficienty pro neznámou funkci  $z$ , kterou umíme řešit.
  - (b) Hledáme řešení tvaru  $y(x) = x^\alpha$ . Dosadíme-li toto do rovnice, dostaneme rovnici  $P(\alpha) = 0$ , kde  $P$  je polynom stupně  $n$ . Najdeme kořeny. Fundamentální systém bude tvořen funkcemi  $h_i(\log x)$ , kde  $h_i$  jsou prvky fundamentálního systému lineární rovnice s konstantními koeficienty s charakteristickým polynomem  $P$ .
- (4) Pro řešení homogenní rovnice na  $(-\infty, 0)$  využijeme toho, že funkce  $y$  je řešením homogenní rovnice na  $(0, +\infty)$ , právě když funkce  $\tilde{y}(x) = y(-x)$  je řešením homogenní rovnice na  $(-\infty, 0)$ .
- (5) Pro hledání partikulárního řešení lze použít:
  - (a) Metodu variace konstant – stejně jako u lineárních rovnic s konstantními koeficienty.
  - (b) Analogii metody speciální pravé strany – analogii Věty XVI.5.
  - (c) Používáme-li výše substituci  $x = e^t$ , lze ji použít na celou, tedy nehomogenní rovnici, a pak hledáme partikulární řešení pro příslušnou lineární rovnici s konstantními koeficienty.

VIII. EULEROVY ROVNICE

1.  $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$     2.  $x^2y'' + xy' + y = x$     3.  $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$   
 4.  $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$     5.  $x^3y''' + xy' - y = 0$     6.  $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' - 6xy' + 12y = x^2$

VÝSLEDKY A NÁVODY.    1.  $y(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^7, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ a_2x^3 + b_2x^7, & x > 0, \end{cases} \quad a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}.$     2.  $y(x) =$

$\frac{1}{2}x + a \cos \log |x| + b \sin \log |x|, x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty), [a, b] \in \mathbf{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}; y(x) = \frac{1}{2}x, x \in \mathbf{R}.$     3.  $y(x) = x \log^2 |x| + ax + bx \log |x|, x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty), a, b \in \mathbf{R}.$     4.  $y(x) = x^3 + x + x \log |x| + ax + bx^2, x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty), a, b \in \mathbf{R}.$     5.  $y(x) = ax + bx \log |x| + cx \log^2 |x|, x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty), a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbf{R}; y(x) = ax, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}.$     6.  $y(x) = \frac{1}{4}x^2 \log |x| + ax^2 + \frac{b}{x^2} + c|x|^{\sqrt{3}} + \frac{d}{|x|^{\sqrt{3}}}, x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty), a, b, c, d \in \mathbf{R}$

IX. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

1.  $z' + y = 0, z' - y' = 3z + y$     2.  $z' = -z + y + e^x, y' = z - y + e^x$     3.  $5z' - 2y' + 4z - y = e^{-x}, z' + 8z - 3y = 5e^{-x}$     4.  $z' + 3z + y = 0, y' - z + y = 0, y(0) = z(0) = 1$     5.  $z' = y - 7z, y' + 2z + 5y = 0$     6.  $z' = 2y - 5z + e^x, y' = z - 6y + e^{-2x}$     7.  $z'' + y' + z = e^x, z' + y'' = 1$     8.  $u' = w + v - u, v' = w + u - v, w' = u + v + w, (u(0) = 1, v(0) = w(0) = 0)$     9.  $u' = v + w, v' = u + w, w' = u + v, (u(0) = -1, v(0) = 1, w(0) = 0)$

ŘEŠTE SOUSTAVY  $y' = Ay + b(x)$ , KDE

10.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}.$     11.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$     12.  $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

13.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$     14.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$     15.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

16.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$     17.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$     18.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$



VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.**  $z = ae^x + be^{-3x}$ ,  $y = -ae^x + 3be^{-3x}$  **2.**  $z = e^x + de^{-2x} + c$ ,  $y = e^x - de^{-2x} + c$  **3.**  $z = -2e^{-x} + ce^x + de^{-2x}$ ,  $y = 3e^{-x} + 3ce^x + 2de^{-2x}$  **4.**  $z = -(c+d)xe^{-2x} + de^{-2x}$ ,  $y = (c+d)xe^{-2x} + ce^{-2x}$ , s poč. podm. :  $z = -2xe^{-2x} + e^{-2x}$ ,  $y = 2xe^{-2x} + e^{-2x}$  **5.**  $z = (c-d)e^{-6x} \sin x + de^{-6x} \cos x$ ,  $y = ce^{-6x} \cos x + (c-2d)e^{-6x} \sin x$  **6.**  $z = \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x} + 2ae^{-4x} + be^{-7x}$ ,  $y = \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x} + ae^{-4x} - be^{-7x}$  **7.**  $z(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{b+c}{2}x^2 + c + dx$ ,  $y = -e^x + \frac{1}{24}x^4 + a + bx + \frac{b+c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2$  **8.**  $u = ae^{-x} + be^{2x} + ce^{-2x}$ ,  $v = ae^{-x} + be^{2x} - ce^{-2x}$ ,  $w = -ae^{-x} + 2be^{2x}$ , s poč.podm.  $u = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ ,  $v = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$ ,  $w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$  **9.**  $u = ae^{2x} + be^{-x}$ ,  $v = ae^{2x} + ce^{-x}$ ,  $w = ae^{2x} - (b+c)e^{-x}$  s poč. podm.  $u = -e^{-x}$ ,  $v = e^{-x}$ ,  $w = 0$  **10.**  $y = (\frac{x-3}{4} + e^{2x}(bx+c), -\frac{3}{4} + e^{2x}(2bx+b+2c), -\frac{2x^2+x+2}{4} + e^{2x}(bx+a+c))$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . **11.**  $y = (e^{-x}(-1+6c+6bx), e^{-x}(15a+2bx+b+2c), e^{-x}(a+2bx+2c))$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . **12.**  $y = (6be^{-x} + 6ce^x, 10ae^{-x} + (3a+9c)e^x, 3be^{-x} + (6a+3c)e^x)$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . **13.**  $y = (-\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x - 2a \cdot e^{3x}, \frac{73}{500} \cos x + \frac{89}{500} \sin x + e^{3x} \cdot (ax^2 + bx + c), -\frac{43}{500} \cos x - \frac{49}{500} \sin x + e^{3x} \cdot (-ax^2 - (2a+b)x - 4a - b - c))$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . **14.**  $y = ((a+3b)e^x \sin x + (3a-b)e^x \cos x, (2a+b)e^x \sin x + (a-2b)e^x \cos x + ce^{4x}, (2b-a)e^x \sin x + (2a+b)e^x \cos x + ce^{4x})$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . **15.**  $y = (e^x(bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(4b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d), e^x(a+bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(2b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d))$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . **16.**  $y = (e^{2x}(cx+d), e^{2x}(cx-c+d), e^{2x}(ax+b), e^{2x}((a+c)x - \frac{1}{3}a + b + d))$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . **17.**  $y = (cx+d, (3c-\frac{5}{2}a)x + \frac{7}{8}a - \frac{5}{2}b - c + 3d, ax+b, \frac{1}{2}ax - \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b)$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . **18.**  $y = (e^x(a \cos x + b \sin x) + c \cos x + d \sin x, \frac{1}{2}e^x((a+b) \cos x + (b-a) \sin x) + c \cos x + d \sin x, e^x(a \cos x + b \sin x) + (c-d) \cos x + (c+d) \sin x, e^x(a \cos x + b \sin x))$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

#### X. LINEÁRNÍ ROVNICE - SNIŽOVÁNÍ ŘÁDU, VARIACE KONSTANT

**1.**  $y'' - \frac{xy'}{x^2+1} + \frac{y}{x^2+1} = 0$  **2.**  $y'' - x^2y' + (x^2-1)y = 0$  **3.**  $y'' - \frac{2y}{x^2} = 5$  **4.**  $y'' - \frac{1+x^2}{x}y' + 2y = 0$   
**5.**  $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = x^3$  **6.**  $y'' + \frac{1-x^2}{x}y' + \frac{y}{\log x} = 0$  **7.**  $y'' + \frac{y}{x^2 \log x} = 0$

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** FS tvoří  $y_1 = x$  (lze uhodnout) a  $y_2 = x \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}$  (na  $\mathbb{R}$ ). **2.** FS tvoří  $y_1 = e^x$  (lze uhodnout) a  $y_2 = e^x \int_0^x e^{\frac{1}{3}t(t^2-6)} dt$  (na  $\mathbb{R}$ ). **3.** FS tvoří  $y_1 = x^2$  a  $y_2 = \frac{1}{x}$  (uhodnout lze kterékoliv z těchto dvou řešení), partikulární řešení je např.  $y_0 = \frac{5}{3}x^2 \log|x|$  (z variace konstant vyjde  $\frac{5}{3}x^2 \log|x| - \frac{5}{9}x^2$ , přitom  $-\frac{5}{9}x^2$  je řešením homogenní rovnice). Vše na  $(-\infty, 0)$  nebo na  $(0, +\infty)$ . **4.** FS tvoří  $y_1 = x^2$  (lze uhodnout) a  $y_2 = x^2 \int_1^x \frac{1}{t^3} e^{t^2/2} dt$  (na  $(0, +\infty)$ ; na  $(-\infty, 0)$  ve vzorci pro  $y_2$  bude  $\int_{-1}^x$ ). **5.** FS tvoří  $y_1 = x$  a  $y_2 = x^5$ , partikulární řešení je např.  $y_0 = \frac{1}{4}x^5 \log|x|$ . Vše na  $(-\infty, 0)$  nebo na  $(0, +\infty)$ . **6.** FS tvoří  $y_1 = \log x$  (lze uhodnout) a  $y_2 = \log x \int_2^x \frac{e^{t^2/2}}{t \log^2 t} dt$  (na  $(1, +\infty)$ ; na  $(0, 1)$  bude ve vzorci pro  $y_2$   $\int_{1/2}^x$ ). **7.** FS tvoří  $y_1 = \log x$  (lze uhodnout) a  $y_2 = \int_2^x \frac{1}{\log^2 t} dt$  (na  $(1, +\infty)$ ; na  $(0, 1)$  bude ve vzorci pro  $y_2$   $\int_{1/2}^x$ ).