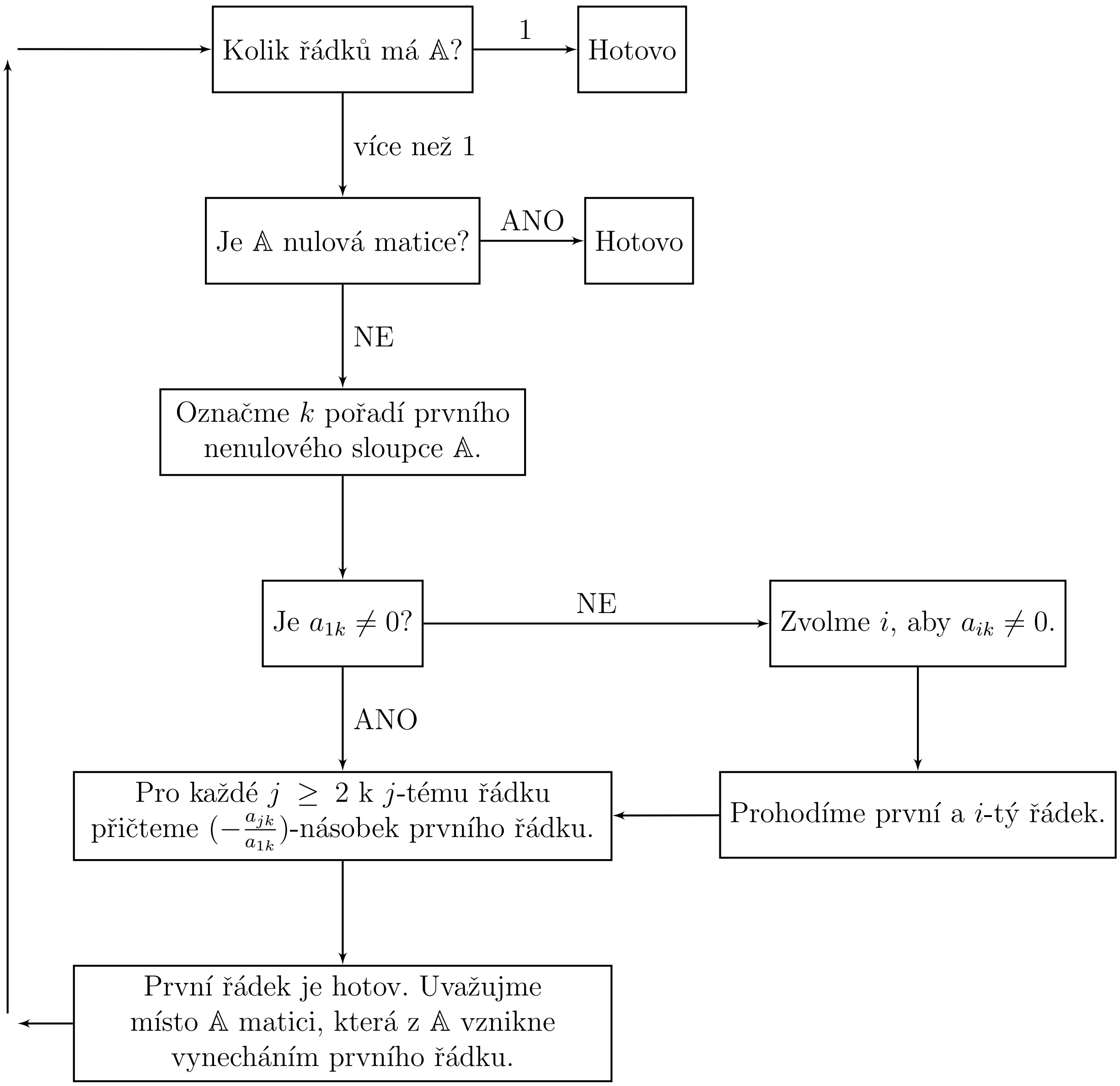
Metoda převodu matice na schodovitou.

Podle bodu (i) Věty VI.5 lze každou matici nějakou transformací převést na schodovitou. Uvedený důkaz zároveň dává algoritmus, jak převod provést. Následuje schéma tohoto algoritmu:



Poznamenejme, že v souladu s konvencí, jak se zapisují algoritmy a programy, $\mathbb{A}$ v diagramu vždy označuje aktuální podobu matice (která se v průběhu aplikace algoritmu mění) a a_{ij} označuje prvek, který je aktuálně na místě ij v matici.

Metoda určení hodnosti matice: Aplikujeme Větu VI.5. Nejprve matici převedeme na schodovitou (na to máme algoritmus), pak spočítáme nenulové řádky výsledné matice. Výsledné číslo je hodnost původní matice.

Příklad 14 ze supersemináře:

První matice:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 1 & 9 & 3 & 7 & 1 \\ 10 & 11 & 10 & 9 & 20 \\ 9 & 2 & 7 & 2 & 19 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 7 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 10 & 11 & 10 & 9 & 20 \\ 9 & 2 & 7 & 2 & 19 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Jako první prohodíme první a druhý řádek. To sice není přesně podle algoritmu, ale usnadní to výpočet, protože na místě 11 budeme mít číslo 1. Nyní provedením čtyř úprav třetího druhu zajistíme, aby v prvním sloupci byly kromě prvního prvku samé nuly.

Tedy postupně k druhému řádku přičteme 3-násobek prvního, ke třetímu (-10)-násobek prvního, ke čtvrtému (-9)-násobek prvního a k pátému (-4)-násobek prvního:

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 7 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 10 & 11 & 10 & 9 & 20 \\ 9 & 2 & 7 & 2 & 19 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 29 & 10 & 23 & -5 \\ 0 & -79 & -20 & -61 & 10 \\ 0 & -79 & -20 & -61 & 10 \\ 0 & -36 & -10 & -28 & 5 \end{pmatrix}$$

Tím máme hotov první řádek (první schod). Dále budeme pracovat jen s druhým až pátým řádkem. Daším cílem bude upravit druhý sloupec. Opět se odchýlíme od algoritmu, abychom si zjednodušili počítání a nemuseli pracovat se zlomky, pokud to není nezbytné.

Proto ke čtvrtému řádku přičteme (-1)-násobek třetího a k pátému řádku přičteme 1-násobek druhého (to je první úprava).

Poté k druhému řádku přičteme 4-násobek pátého (druhá úprava).

Pak již snadno dokončíme druhý schod – k třetímu řádku přičteme 79-násobek druhého a k pátému 7-násobek druhého (pátá úprava).

$$\text{+1.}\begin{pmatrix}1 & 9 & 3 & 7 & 1\\ 0 & 29 & 10 & 23 & -5\\ 0 & -79 & -20 & -61 & 10\\ 0 & -79 & -20 & -61 & 10\\ 0 & -36 & -10 & -28 & 5\end{pmatrix}\text{-1.} \sim \begin{pmatrix}1 & 9 & 3 & 7 & 1\\ 0 & 29 & 10 & 23 & -5\\ 0 & -79 & -20 & -61 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 0 & -5 & 0\end{pmatrix}\text{+4.}$$

$$\sim \text{+79.}\begin{pmatrix}1 & 9 & 3 & 7 & 1\\ 0 & 1 & 10 & 3 & -5\\ 0 & -79 & -20 & -61 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 0 & -5 & 0\end{pmatrix}\text{+7.} \sim \begin{pmatrix}1 & 9 & 3 & 7 & 1\\ 0 & 1 & 10 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 770 & 176 & -385\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 70 & 16 & -35\end{pmatrix}$$

Nyní vidíme, že třetí řádek se rovná 11-násobku pátého. Proto k pátého řádku přičteme $(-\frac{1}{11})$-násobek druhého a dostaneme

$$\text{-1/11.}\begin{pmatrix}1 & 9 & 3 & 7 & 1\\ 0 & 1 & 10 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 770 & 176 & -385\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 70 & 16 & -35\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 9 & 3 & 7 & 1\\ 0 & 1 & 10 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 770 & 176 & -385\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Tato matice je schodovitá a má tři nenulové řádky. Proto hodnost původní matice je rovna 3.

Poznámka: Bylo by samozřejmě možné postupovat přímo podle algoritmu. Ale bylo by to početně náročnější a bylo by snazší udělat chybu. Postup by vypadal takto:

$$
\text{+4/3.}\quad \text{+10/3.}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 1 & 9 & 3 & 7 & 1 \\ 10 & 11 & 10 & 9 & 20 \\ 9 & 2 & 7 & 2 & 19 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}\text{+1/3.}\quad \text{+3.} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & \frac{29}{3} & \frac{10}{3} & \frac{23}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{53}{3} & \frac{40}{3} & \frac{47}{3} & -\frac{20}{3} \\ 0 & 8 & 10 & 8 & -5 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\text{-53/29.}\quad \text{-24/29.}\quad \text{-8/29.}
$$

$$
\sim \text{-1/3.}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & \frac{29}{3} & \frac{10}{3} & \frac{23}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{210}{29} & \frac{48}{29} & -\frac{105}{29} \\ 0 & 0 & \frac{210}{29} & \frac{48}{29} & -\frac{105}{29} \\ 0 & 0 & \frac{70}{29} & \frac{16}{29} & -\frac{35}{29} \end{pmatrix}\text{-1.} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & \frac{29}{3} & \frac{10}{3} & \frac{23}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{210}{29} & \frac{48}{29} & -\frac{105}{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Výsledek je ovšem stejný, hodnost vyjde 3, ale při počítání se zlomky se snadněji udělá chyba.

Druhá matice: Tato matice závisí na parametrech x a y:

$$
\text{-y.}\quad \text{-5.}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & x & x+1 \\ y & y+1 & 15 & 16 \end{pmatrix}\text{-9.} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & x-27 & x-35 \\ 0 & -y+1 & 15-3y & 16-4y \end{pmatrix}\text{.(-1/4)}
$$

$$
\sim \text{+8.}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & x-27 & x-35 \\ 0 & -y+1 & 15-3y & 16-4y \end{pmatrix}\text{+(y-1).} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & x-11 & x-11 \\ 0 & 0 & 13-y & 13-y \end{pmatrix}
$$

První úprava spočívala v provedení tří úprav třetího druhu – k druhému řádku jsme přičetli (-5)-násobek prvního, ke třetímu (-9)-násobek prvního a ke čtvrtému $(-y)$-násobek prvního. *Poznamenejme, že zde není třeba rozlišovat případy $y = 0$ a $y \neq 0$. Úpravy jsou v obou případech stejné. Pokud $y = 0$, pak třetí z úprav neudělá nic.*

Pak jsme druhý řádek vynásobili číslem $-\frac{1}{4}$.

Nakonec jsme k třetímu řádku přičetli 8-násobek druhého a k čtvrtému $(y-1)$-násobek druhého.

Nyní již musíme rozlišit jednotlivé možnosti.

$x = 11$, $y = 13$: Pak výsledná matice je schodovitá a má dva nenulové řádky. Tedy hodnost je 2.

$x \neq 11$, $y = 13$: Pak výsledná matice je schodovitá a má tři nenulové řádky. Tedy hodnost je 3.

$x = 11$, $y \neq 13$: Pak výsledná matice není schodovitá. Pokud však přehodíme třetí a čtvrtý řádek, dostaneme schodovitou matici se třemi nenulovými řádky. Tedy hodnost je 3.

$x \neq 11$, $y \neq 13$: Pak výsledná matice není schodovitá. Ale můžeme třetí řádek vynásobit $\frac{1}{x-11}$ a čtvrtý vynásobit $\frac{1}{13-y}$. Takto dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kterou jsme dále upravili tak, že jsme ke čtvrtému řádku přičetli (-1)-násobek třetího.

Teď již máme schodovitou matici se třemi nenulovými řádky. Tedy hodnost je 3.

Závěr: Pokud $x = 11$ a $y = 13$, je hodnost 2, v ostatních případech je hodnost 3.

Čtvrtá matice: Tato matice závisí na parametru x:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+|x| & x^2 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ -2. \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 2+|x| & x^2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ -1. \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & |x|-2 & x^2-2x \\ 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix}$$

Nejprve jsme prohodili první a druhý řádek.

Potom jsme k druhému řádku přičetli (-2)-násobek prvního řádku a ke třetímu (-1)-násobek prvního.

Nyní rozlišíme tři možnosti:

$x \neq \pm 2$: Výsledná matice je schodovitá a všechny řádky jsou nenulové. Tedy hodnost je 3.

$x = 2$: Druhý a třetí řádek jsou nulové. Tedy matice je schodovitá a pouze jeden řádek je nenulový. Hodnost je 1.

$x = -2$**:** Výsledná matice má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde jsme ke třetímu řádku přičetli $(-\frac{1}{2})$-násobek druhého. Poslední matice je schodovitá a má dva nenulové řádky, hodnost je tedy 2.