Příklady na aplikaci věty o implicitní funkci

Příklad 11 ze supersemináře. Úkolem je dokázat, že uvedená rovnost určuje v okolí uvedeného bodu funkci $y = f(x)$ a spočítat $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$. První část znamená ověřit předpoklady věty o implicitní funkci (Věta V.16); v druhé části je třeba spočítat příslušné derivace s využitím Věty V.14. Dále je úkolem napsat rovnici tečny v příslušném bodě.

Příklad 11b). $\operatorname{arctg}(y-x) + \operatorname{arctg} \frac{y^2}{x} = \frac{\pi}{4}$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$.
Krok 1: Ověření předpokladů Věty V.16.

Označme $F(x,y) = \operatorname{arctg}(y-x) + \operatorname{arctg} \frac{y^2}{x} - \frac{\pi}{4}$. Pak platí:

- F je definovaná na množině $G = \{[x,y]; x \neq 0\}$. Tato množina je otevřená a funkce F je třídy C^∞ na G (protože vznikla pomocí skládání a aritmetických operací z funkcí třídy C^∞.

  Poznámka: Pro aplikaci Věty V.16 stačí předpoklad, že F je třídy C^1. Ale máme spočítat druhou derivaci funkce f, proto potřebujeme vědět, že F je třídy C^2 (viz poznámka za Větou V.16). Snadno ovšem vidíme, že F je dokonce třídy C^∞.

- $F(1,1) = \operatorname{arctg}(1-1) + \operatorname{arctg} \frac{1^2}{1} - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 - \frac{\pi}{4} = 0.$

- Na celé množině G platí

  $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{1+(y-x)^2} \cdot 1 + \frac{1}{1+(\frac{y^2}{x})^2} \cdot \frac{2y}{x} = \frac{1}{1+(y-x)^2} + \frac{2xy}{x^2+y^4}.$$

  Speciálně

  $$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{1+(1-1)^2} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{1^2+1^4} = 2 \neq 0.$$

Předpoklady Věty V.16 jsou splněny, tedy větu můžeme použít. Plyne z ní, že existuje U okolí bodu 1, V okolí bodu 1 a funkce $f : U \to V$ splňující

$$\forall x \in U \forall y \in V : y = f(x) \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(y-x) + \operatorname{arctg} \frac{y^2}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

Navíc je $f \in C^\infty(U)$ (dle poznámky za Větou V.16).

Krok 2, výpočet $f'(1)$.

Metoda 1: Použijeme vzorec z Věty V.16:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}. \tag{$*$}$$

Dosadíme $x = 1$ a použijeme, že $f(1) = 1$. Přitom $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 2$, jak bylo spočteno výše. Dále

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{1+(y-x)^2} \cdot (-1) + \frac{1}{1+(\frac{y^2}{x})^2} \cdot \frac{-y^2}{x^2} = \frac{-1}{1+(y-x)^2} - \frac{y^2}{x^2+y^4},$$

tedy

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = \frac{-1}{1+(1-1)^2} - \frac{1^2}{1^2+1^4} = -\frac{3}{2},$$

tedy

$$f'(1) = -\frac{-\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Metoda 2: Funkce f splňuje na U rovnost $F(x, f(x)) = 0$, neboli

$$\operatorname{arctg}(f(x) - x) + \operatorname{arctg}\frac{f(x)^2}{x} - \frac{\pi}{4} = 0 \text{ pro } x \in U.$$

Spočteme derivaci této funkce. Jednak je rovna nule, protože tato funkce je konstantní nulová funkce. Zároveň vzorec na levé straně můžeme zderivovat podle pravidel pro počítání derivací (používáme, že $f \in C^1(U)$). Takto dostaneme

$$\frac{f'(x)-1}{1+(f(x)-x)^2} + \frac{1}{1+(\frac{f(x)^2}{x})^2} \cdot \frac{2f(x)f'(x)\cdot x - f(x)^2}{x^2} = 0 \tag{$\circ$}$$

pro $x \in U$. Dosadíme do ($\circ$) $x = 1$ a použijeme skutečnost, že $f(1) = 1$, a dostaneme

$$\frac{f'(1)-1}{1+(1-1)^2} + \frac{1}{1+(\frac{1^2}{1})^2} \cdot \frac{2\cdot 1\cdot f'(1)\cdot 1 - 1^2}{1^2} = 0,$$

neboli

$$f'(1) - 1 + \frac{1}{2}(2f'(1) - 1) = 0.$$

Odtud vyjádříme

$$f'(1) = \frac{3}{4}.$$

Krok 3, výpočet $f''(1)$.

Metoda 1: Vyjdeme ze vzorce $(*)$. Dosadíme do něj za $\frac{\partial F}{\partial x}$ (spočteno ve druhém kroku) a za $\frac{\partial F}{\partial y}$ (spočteno v prvním kroku):

$$f'(x) = -\frac{\frac{-1}{1+(f(x)-x)^2} - \frac{f(x)^2}{x^2+f(x)^4}}{\frac{1}{1+(f(x)-x)^2} + \frac{2xf(x)}{x^2+f(x)^4}} = \frac{x^2 + f(x)^4 + f(x)^2(1+(f(x)-x)^2)}{x^2 + f(x)^4 + 2xf(x)(1+(f(x)-x)^2)}$$

pro $x \in U$. Nyní tuto funkci zderivujeme a dostaneme

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{1}{(x^2+f(x)^4+2xf(x)(1+(f(x)-x)^2))^2} \\ \cdot \Bigg(\Big(2x + 4f(x)^3 f'(x) + 2f(x)f'(x)(1+(f(x)-x)^2) \\ + f(x)^2 \cdot 2(f(x)-x)(f'(x)-1)\Big) \\ \cdot \Big(x^2 + f(x)^4 + 2xf(x)(1+(f(x)-x)^2)\Big) \\ - \Big(x^2 + f(x)^4 + f(x)^2(1+(f(x)-x)^2)\Big) \\ \cdot \Big(2x + 4f(x)^3 f'(x) + 2(f(x)+xf'(x))(1+(f(x)-x)^2) \\ + 2xf(x) \cdot 2(f(x)-x)(f'(x)-1)\Big)\Bigg) \end{aligned}$$

Nyní dosadíme $x = 1$ a použijeme, že $f(1) = 1$ a $f'(1) = \frac{3}{4}$. Dostaneme

$$f''(1) = \tfrac{1}{4^2}((2+3+\tfrac{3}{2}) \cdot 4 - 3 \cdot (2+3+2(1+\tfrac{3}{4}))) = \frac{1}{16}(26 - \tfrac{51}{2}) = \tfrac{1}{32}.$$

Metoda 2: Vyjdeme z rovnosti $(\circ)$. Po vynásobení $(1+(f(x)-x)^2)(x^2 + f(x)^4)$ dostaneme

$$(x^2+f(x)^4)(f'(x)-1) + (1+(f(x)-x)^2)(2xf(x)f'(x) - f(x)^2) = 0$$

pro $x \in U$. Nyní tuto rovnost zderivujeme. (Protože funkce na levé straně se rovná funkci na pravé straně na celém U, rovnají se i jejich derivace. Derivace pravé strany je nula, derivaci levé strany spočteme dle běžných pravidel. Mj. používáme, že f je třídy C^2.) Dostaneme:

$$\begin{aligned}(2x+4f(x)^3f'(x))(f'(x)-1)+(x^2+f(x)^4)f''(x)\\ +2(f(x)-x)(f'(x)-1)(2xf(x)f'(x)-f(x)^2)\\ +(1-(f(x)-x)^2)(2f(x)f'(x)+2xf'(x)^2+2xf(x)f''(x)-2f(x)f'(x))=0\end{aligned}$$

pro $x \in U$. Nyní dosadíme $x = 1$ a použijeme, že $f(1) = 1$ a $f'(1) = \frac{3}{4}$. Dostaneme rovnici

$$(2+3)\cdot(\tfrac{3}{4}-1)+(1+1)f''(1)+1\cdot(\tfrac{3}{2}+\tfrac{9}{8}+2f''(1)-\tfrac{3}{2})=0,$$

neboli

$$-\frac{5}{4}+2f''(1)+\frac{9}{8}+2f''(1)=0,$$

tedy

$$f''(1)=\frac{1}{32}.$$

Krok 4, rovnice tečny: Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (pokud $f'(x_0)$ existuje vlastní). Stačí tedy dosadit zadané hodnoty a spočtenou derivaci. Rovnice tečny je tedy $y = 1+\frac{3}{4}(x-1)$.

Komentář k řešení: Obě metody výpočtu derivací vedou k cíli. Považuji za vhodnější (ve většině případů) používat druhou metodu. První je jednodušší, pokud chceme spočítat pouze první derivaci. Pro výpočet druhé derivace bývá jednodušší druhá metoda.

Dále, k tomu, abychom napsali rovnici tečny, stačí znát hodnotu první derivace, druhá k tomu třeba není. Proto by bylo logické kroky 3 a 4 dělat v opačném pořadí.

Příklad 12 ze supersemináře. Úkolem je dokázat, že uvedená rovnost určuje v okolí uvedeného bodu funkci $z = f(x, y)$ a napsat rovnici tečné roviny v příslušném bodě.

Příklad 12b). $-e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = e^{xyz}$, $[x_0, y_0, z_0] = [0, 2, 0]$.

Krok 1: Ověření předpokladů Věty V.16.

Označme $F(x, y, z) = -e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} - e^{xyz}$. Pak platí:

- F je definovaná na $\mathbb{R}^3$ a je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$ (protože vznikla pomocí skládání a aritmetických operací z funkcí třídy C^∞).

- $F(0,2,0) = -1+1+1-1 = 0.$
- Na celém $\mathbb{R}^3$ platí $\frac{\partial F}{\partial z} = e^{yz}\cdot y + e^{xz}\cdot x - e^{xyz}\cdot xy$. Speciálně

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,2,0) = 1\cdot 2 + 1\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 2 = 2 \neq 0.$$

Předpoklady Věty V.16 jsou splněny, tedy větu můžeme použít. Plyne z ní, že existuje U okolí bodu $[0,2]$, V okolí bodu 0 a funkce $f : U \to V$ splňující

$$\forall [x,y] \in U \forall z \in V : z = f(x,y) \Leftrightarrow -e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = e^{xyz}.$$

Navíc je $f \in C^\infty(U)$ (dle poznámky za Větou V.16).

Krok 2, výpočet parciálních derivací. Chceme-li pouze parciální derivace prvního řádu, je snazší použít Metodu 1 popsanou výše. Máme

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^{xy}\cdot y + e^{xz}\cdot z - e^{xyz}\cdot yz,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^{xy}\cdot x + e^{yz}\cdot z - e^{xyz}\cdot xz$$

na $\mathbb{R}^3$, tedy

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,2,0) = -2 \text{ a } \frac{\partial F}{\partial y}(0,2,0) = 0.$$

Odtud odvodíme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,2,0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,2,0)} = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(0,2,0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,2,0)} = 0.$$

Krok 3, tečná rovina: Tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[0,2,f(0,2)] = [0,2,0]$ je dána rovnicí $z = 0 + 1.(x-0) + 0.(y-2)$, tedy $z = x$.

Dodatečná úloha: Spočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,2)$.

Použijeme analogii Metody 2 uvedené výše. Funkce f splňuje

$$-e^{xy} + e^{yf(x,y)} + e^{xf(x,y)} - e^{xyf(x,y)} = 0 \text{ pro } [x,y] \in U.$$

Zderivujeme podle x (obě strany se rovnají na U, rovnají se tedy i jejich parciální derivace):

$$\begin{aligned}-e^{xy}\cdot y+e^{yf(x,y)}\cdot y\cdot\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+e^{xf(x,y)}(f(x,y)+x\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y))&\\ -e^{xyf(x,y)}(yf(x,y)+xy\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y))&=0\end{aligned}$$

pro $[x,y]\in U$.

Tuto rovnost zderivujeme podle y a dostaneme

$$\begin{aligned}-e^{xy}\cdot xy-e^{xy}+e^{yf(x,y)}\cdot(f(x,y)+y\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y))\cdot y\cdot\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)&\\ +e^{yf(x,y)}\cdot(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\cdot\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y))&\\ +e^{xf(x,y)}\cdot x\cdot\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot(f(x,y)+x\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y))&\\ +e^{xf(x,y)}\cdot(\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)+x\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y))&\\ -e^{xyf(x,y)}(xf(x,y)+xy\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y))(yf(x,y)+xy\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y))&\\ -e^{xyf(x,y)}(f(x,y)+y\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)+x\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+xy\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y))&=0\end{aligned}$$

pro $[x,y]\in U$. Nyní dosadíme $x=0$, $y=2$ a použijeme, že $f(0,2)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)=1$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)=0$. Dostaneme rovnici

$$-1+1\cdot(1+2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,2))=0,$$

z níž vyjádříme $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,2)=0$.

Poznámky: Tento typ úloh je vpodstatě algoritmický. Ověříme předpoklady Věty V.16. (Kdyby splněny nebyly, nevíme, co s tím, pokud jsou splněny, pokračujeme dále.) Dále počítáme derivace jednou či druhou metodou, případně druhé derivace. Mezivýsledky mohou vypadat složitě, ale po dosazení správných hodnot se mohou výrazně zjednodušit.