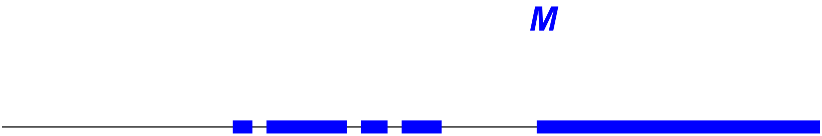
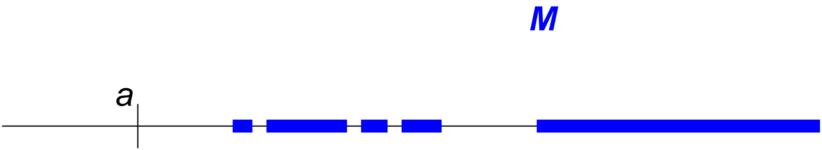
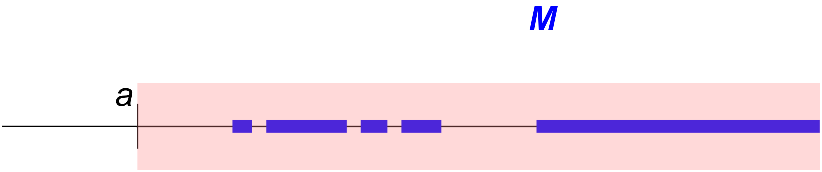
Dolní závora množiny



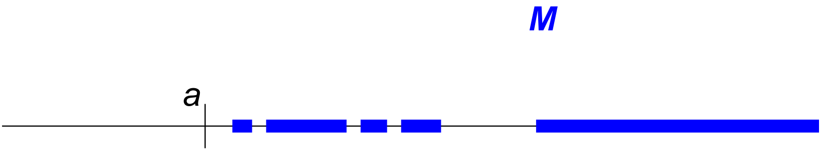
Dolní závora množiny



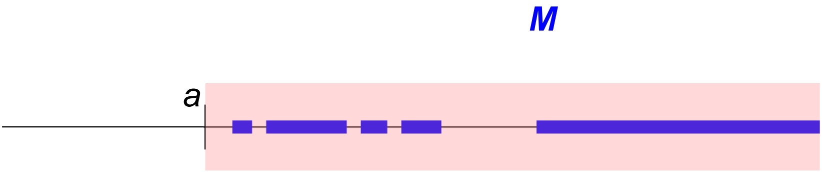
Dolní závora množiny



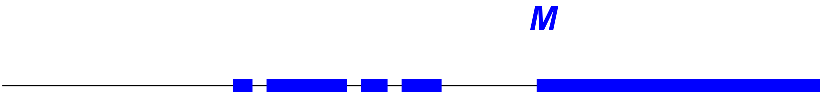
Dolní závora množiny



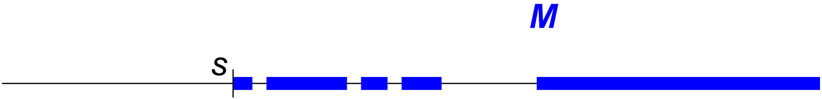
Dolní závora množiny



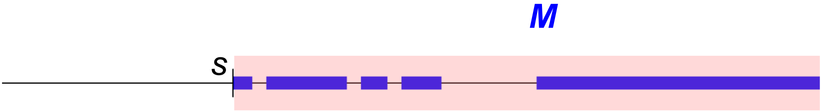
Infimum množiny



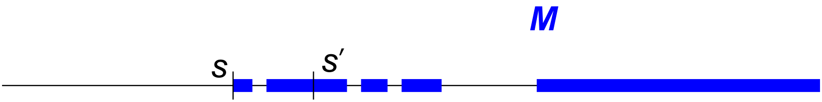
Infimum množiny



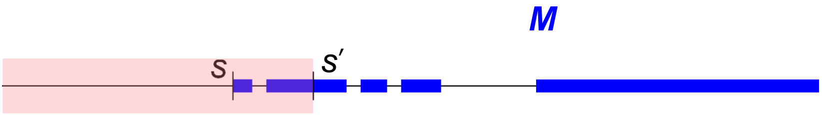
Infimum množiny



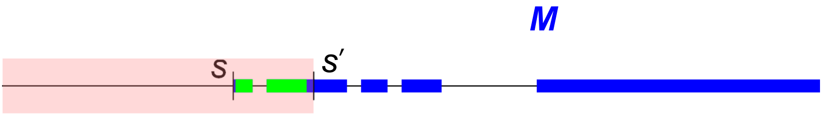
Infimum množiny



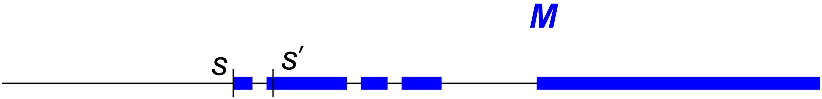
Infimum množiny



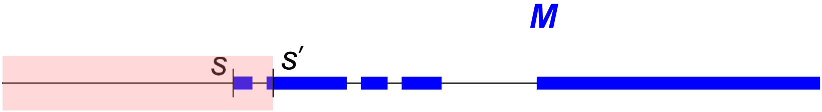
Infimum množiny



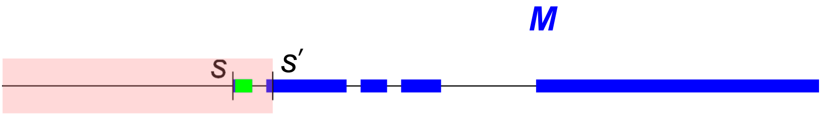
Infimum množiny



Infimum množiny



Infimum množiny

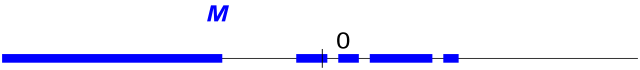


Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená

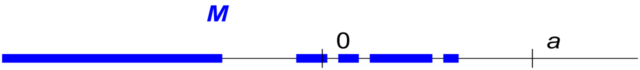
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená



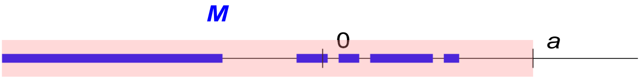
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená



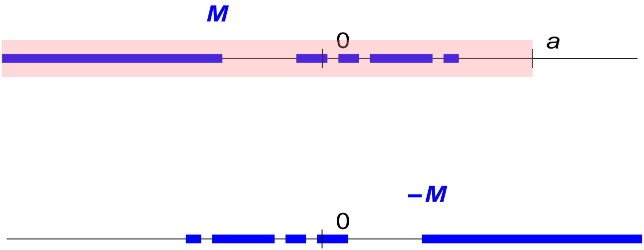
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená



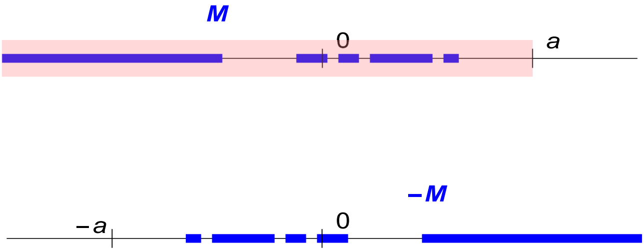
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená



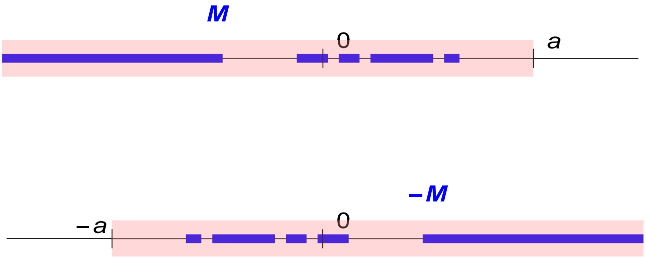
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená



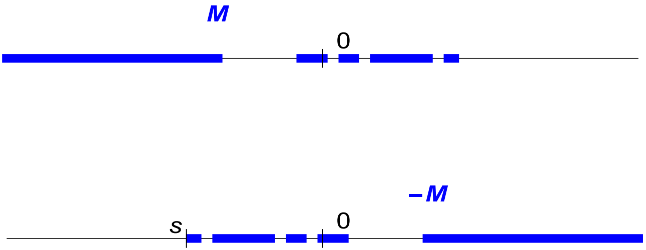
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená



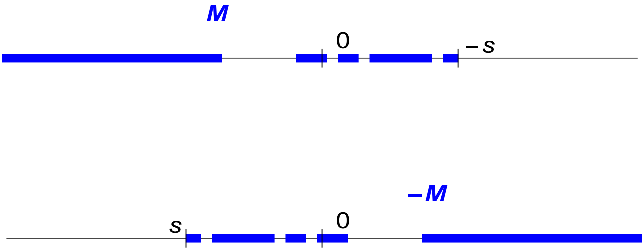
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená
- Nechť $s = \inf(-M)$.



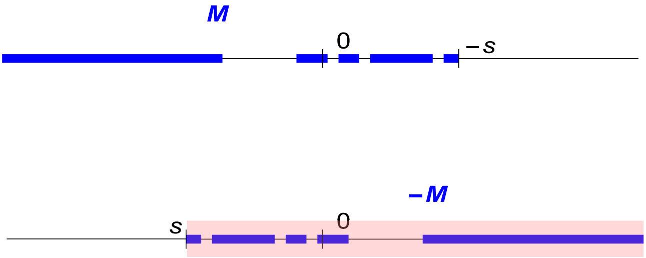
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená
- Nechť $s = \inf(-M)$.
- Pak $-s = \sup M$:



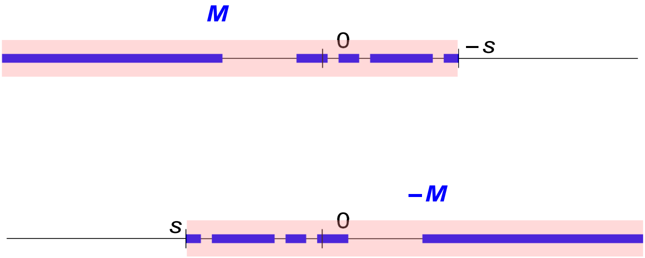
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená
- Nechť $s = \inf(-M)$.
- Pak $-s = \sup M$:
  - s je dolní závora $-M$



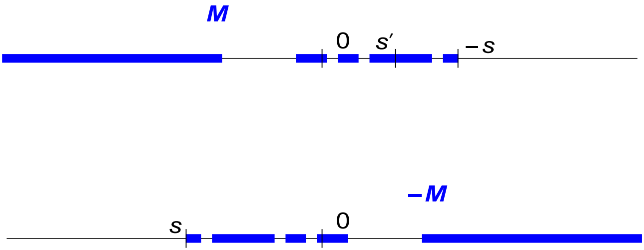
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená
- Nechť $s = \inf(-M)$.
- Pak $-s = \sup M$:
  - s je dolní závora $-M \Rightarrow -s$ je horní závora M



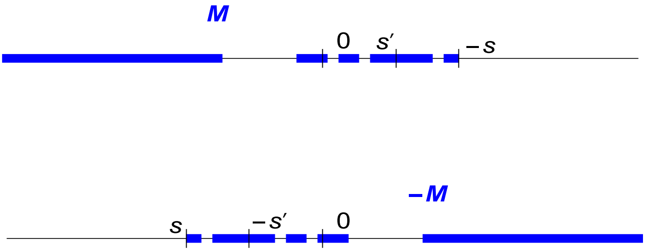
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená
- Nechť $s = \inf(-M)$.
- Pak $-s = \sup M$:
  - s je dolní závora $-M \Rightarrow -s$ je horní závora M
  - $s' < -s$



Věta o supremu

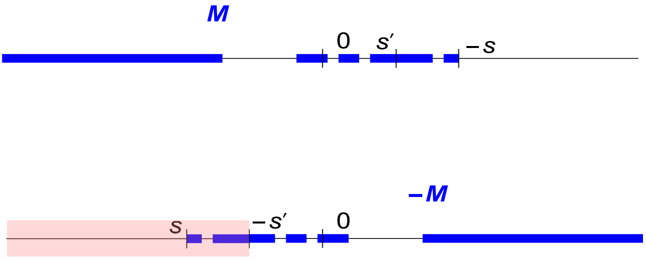
- M neprázdná shora omezená
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená
- Nechť $s = \inf(-M)$.
- Pak $-s = \sup M$:
  - s je dolní závora $-M \Rightarrow -s$ je horní závora M
  - $s' < -s \Rightarrow -s' > s$



Věta o supremu

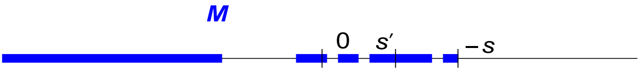
- M neprázdná shora omezená

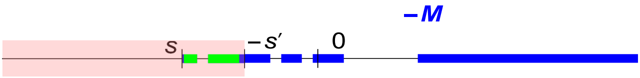
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená
- Nechť $s = \inf(-M)$.
- Pak $-s = \sup M$:
  - s je dolní závora $-M \Rightarrow -s$ je horní závora M
  - $s' < -s \Rightarrow -s' > s \Rightarrow -s'$ není dolní závora $-M$



Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená
- Nechť $s = \inf(-M)$.
- Pak $-s = \sup M$:
  - s je dolní závora $-M \Rightarrow -s$ je horní závora M
  - $s' < -s \Rightarrow -s' > s \Rightarrow -s'$ není dolní závora $-M$



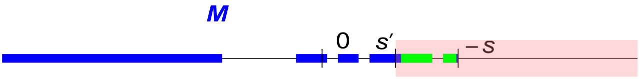


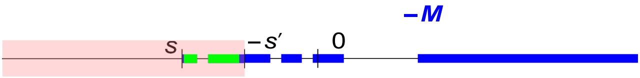
Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená

  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená
- Nechť $s = \inf(-M)$.
- Pak $-s = \sup M$:
  - s je dolní závora $-M \Rightarrow -s$ je horní závora M
  - $s' < -s \Rightarrow -s' > s \Rightarrow -s'$ není dolní závora $-M$

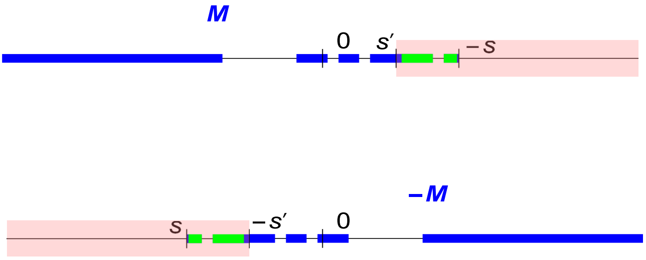
    $\Rightarrow s'$ není horní závora M





Věta o supremu

- M neprázdná shora omezená
  $\Rightarrow -M$ neprázdná zdola omezená
- Nechť $s = \inf(-M)$.
- Pak $-s = \sup M$:
  - s je dolní závora $-M \Rightarrow -s$ je horní závora M
  - $s' < -s \Rightarrow -s' > s \Rightarrow -s'$ není dolní závora $-M$
    $\Rightarrow s'$ není horní závora M



Existence celé části reálného čísla

Krok 1: Množina Z není zdola omezená.

Existence celé části reálného čísla

Krok 1: Množina Z není zdola omezená.

Důkaz (sporem):

Existence celé části reálného čísla

Krok 1: Množina $\mathbb{Z}$ není zdola omezená.

Důkaz (sporem):

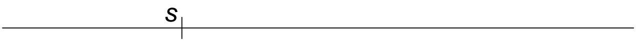
- Nechť $\mathbb{Z}$ je zdola omezená.

Existence celé části reálného čísla

Krok 1: Množina Z není zdola omezená.

Důkaz (sporem):

- Nechť **Z** je zdola omezená.
- Protože **Z** $\neq \emptyset$, existuje $s = \inf$ **Z**.

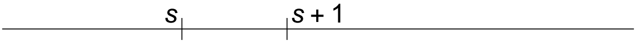


Existence celé části reálného čísla

Krok 1: Množina Z není zdola omezená.

Důkaz (sporem):

- Nechť **Z** je zdola omezená.
- Protože $\mathbf{Z} \neq \emptyset$, existuje $s = \inf \mathbf{Z}$.
- $s + 1 > s$

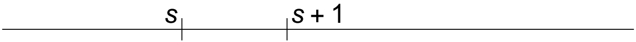


Existence celé části reálného čísla

Krok 1: Množina Z není zdola omezená.

Důkaz (sporem):

- Nechť **Z** je zdola omezená.
- Protože $\mathbf{Z} \neq \emptyset$, existuje $s = \inf \mathbf{Z}$.
- $s + 1 > s \Rightarrow s + 1$ není dolní závora

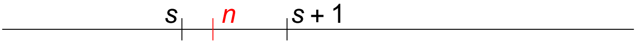


Existence celé části reálného čísla

Krok 1: Množina $\mathbf{Z}$ není zdola omezená.

Důkaz (sporem):

- Nechť $\mathbf{Z}$ je zdola omezená.
- Protože $\mathbf{Z} \neq \emptyset$, existuje $s = \inf \mathbf{Z}$.
- $s + 1 > s \Rightarrow s + 1$ není dolní závora $\Rightarrow \exists n \in \mathbf{Z} : n < s + 1$.

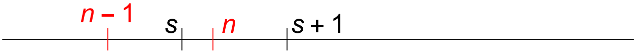


Existence celé části reálného čísla

Krok 1: Množina Z není zdola omezená.

Důkaz (sporem):

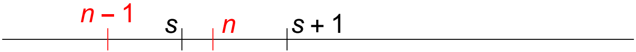
- Nechť $\mathbf{Z}$ je zdola omezená.
- Protože $\mathbf{Z} \neq \emptyset$, existuje $s = \inf \mathbf{Z}$.
- $s + 1 > s \Rightarrow s + 1$ není dolní závora $\Rightarrow \exists n \in \mathbf{Z} : n < s + 1$.
- Pak $n - 1 < s$ a $n - 1 \in \mathbf{Z}$



Krok 1: Množina $\mathbf{Z}$ není zdola omezená.

Důkaz (sporem):

- Nechť $\mathbf{Z}$ je zdola omezená.
- Protože $\mathbf{Z} \neq \emptyset$, existuje $s = \inf \mathbf{Z}$.
- $s + 1 > s \Rightarrow s + 1$ není dolní závora $\Rightarrow \exists n \in \mathbf{Z} : n < s + 1$.
- Pak $n - 1 < s$ a $n - 1 \in \mathbf{Z} \Rightarrow s$ není dolní závora.

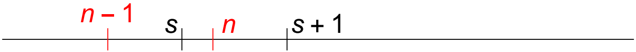


Existence celé části reálného čísla

Krok 1: Množina Z není zdola omezená.

Důkaz (sporem):

- Nechť $\mathbf{Z}$ je zdola omezená.
- Protože $\mathbf{Z} \neq \emptyset$, existuje $s = \inf \mathbf{Z}$.
- $s + 1 > s \Rightarrow s + 1$ není dolní závora $\Rightarrow \exists n \in \mathbf{Z} : n < s + 1$.
- Pak $n - 1 < s$ a $n - 1 \in \mathbf{Z} \Rightarrow s$ není dolní závora.
- To je spor.



Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

- Nechť $x \in \mathbf{R}$.

Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.

Existence celé části reálného čísla

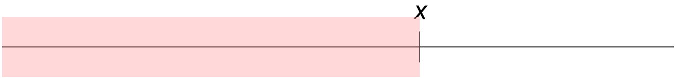
Krok 2 - vlastní důkaz:

- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1)

Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

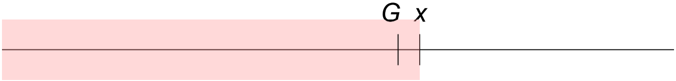
- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená.



Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.



Krok 2 - vlastní důkaz:

- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.
- $G - 1 < G$

Existence celé části reálného čísla

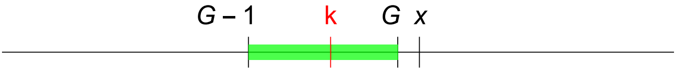
Krok 2 - vlastní důkaz:

- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.
- $G - 1 < G \Rightarrow G - 1$ není horní závora

Krok 2 - vlastní důkaz:

- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.
- $G - 1 < G \Rightarrow G - 1$ není horní závora

  $\Rightarrow \exists k \in M : k > G - 1$.

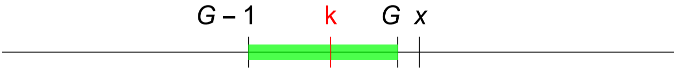


Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.
- $G - 1 < G \Rightarrow G - 1$ není horní závora

  $\Rightarrow \exists k \in M : k > G - 1$.
- $k + 1 > G$.

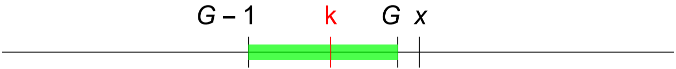


Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.
- $G - 1 < G \Rightarrow G - 1$ není horní závora

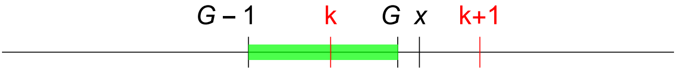
  $\Rightarrow \exists k \in M : k > G - 1.$
- $k + 1 > G \;\Rightarrow k + 1 \notin M$.



Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

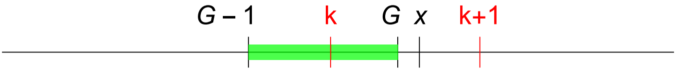
- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.
- $G - 1 < G \Rightarrow G - 1$ není horní závora
$$\Rightarrow \exists k \in M : k > G - 1.$$
- $k + 1 > G \ \Rightarrow k + 1 \notin M \Rightarrow k + 1 > x$.



Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

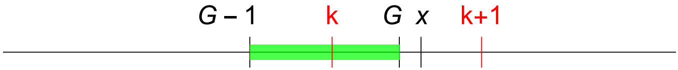
- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.
- $G - 1 < G \Rightarrow G - 1$ není horní závora
  $\Rightarrow \exists k \in M : k > G - 1$.
- $k + 1 > G \Rightarrow k + 1 \notin M \Rightarrow k + 1 > x$.
- Tedy $k \in \mathbf{Z}$ a $k \leq x < k + 1$.



Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

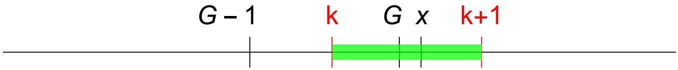
- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.
- $G - 1 < G \Rightarrow G - 1$ není horní závora
  $\Rightarrow \exists k \in M : k > G - 1$.
- $k + 1 > G \;\Rightarrow k + 1 \notin M \Rightarrow k + 1 > x$.
- Tedy $k \in \mathbf{Z}$ a $k \leq x < k + 1$.
- $M \subset \mathbf{Z}$



Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

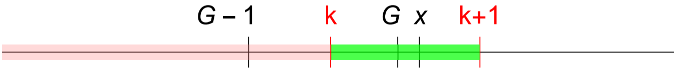
- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.
- $G - 1 < G \Rightarrow G - 1$ není horní závora
  $\Rightarrow \exists k \in M : k > G - 1$.
- $k + 1 > G \ \Rightarrow k + 1 \notin M \Rightarrow k + 1 > x$.
- Tedy $k \in \mathbf{Z}$ a $k \leq x < k + 1$.
- $M \subset \mathbf{Z} \Rightarrow M \cap (k, k + 1) = \emptyset$



Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

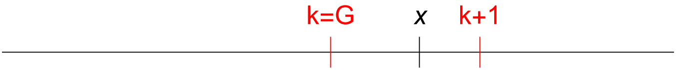
- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.
- $G - 1 < G \Rightarrow G - 1$ není horní závora
  $\Rightarrow \exists k \in M : k > G - 1$.
- $k + 1 > G \ \Rightarrow k + 1 \notin M \Rightarrow k + 1 > x$.
- Tedy $k \in \mathbf{Z}$ a $k \leq x < k + 1$.
- $M \subset \mathbf{Z} \Rightarrow M \cap (k, k+1) = \emptyset \Rightarrow k$ je horní závora M



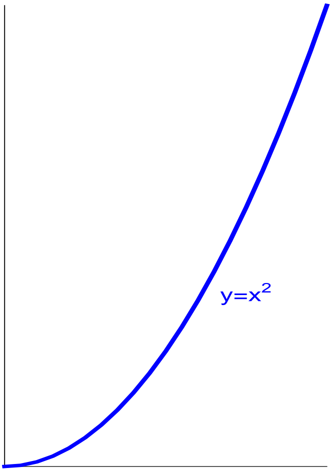
Existence celé části reálného čísla

Krok 2 - vlastní důkaz:

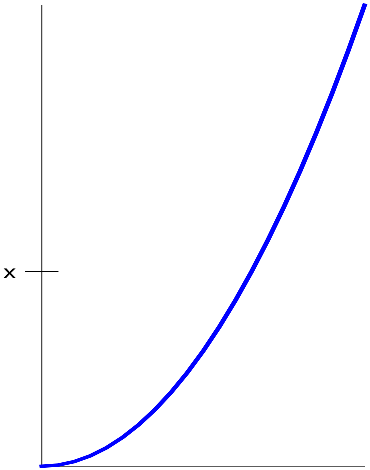
- Nechť $x \in \mathbf{R}$. Označme $M = \{k \in \mathbf{Z}; k \leq x\}$.
- $M \neq \emptyset$ (Krok 1) a M je shora omezená. $G = \sup M$.
- $G - 1 < G \Rightarrow G - 1$ není horní závora $\Rightarrow \exists k \in M : k > G - 1$.
- $k + 1 > G \ \Rightarrow k + 1 \notin M \Rightarrow k + 1 > x$.
- Tedy $k \in \mathbf{Z}$ a $k \leq x < k + 1$.
- $M \subset \mathbf{Z} \Rightarrow M \cap (k, k+1) = \emptyset \Rightarrow k$ je horní závora M $\Rightarrow k = G$.



Existence druhé odmocniny

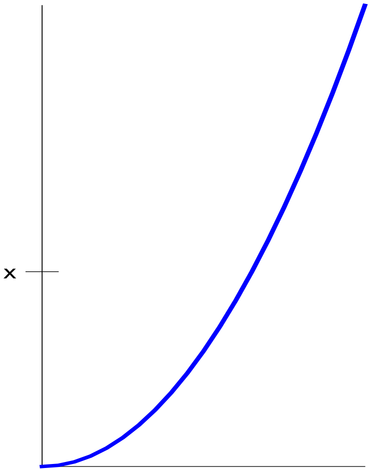


Existence druhé odmocniny



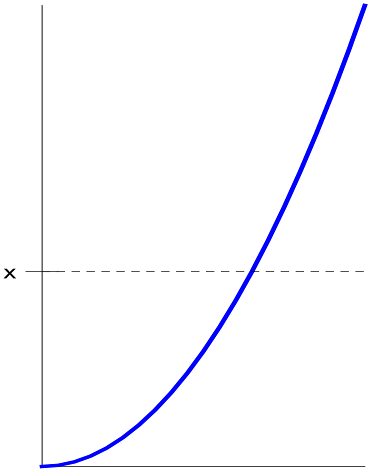
- Nechť $x > 0$.

Existence druhé odmocniny



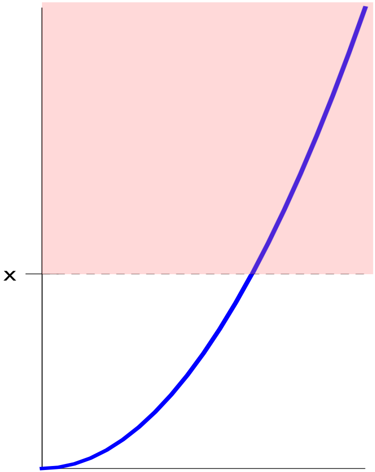
- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$

Existence druhé odmocniny



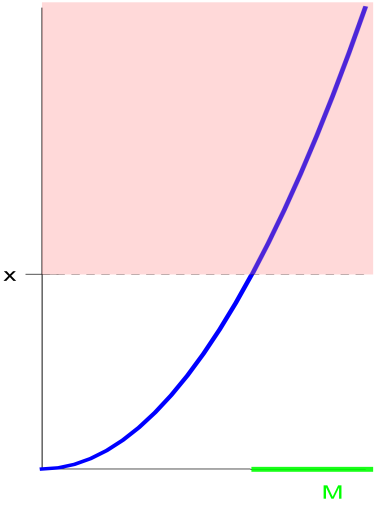
- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$

Existence druhé odmocniny



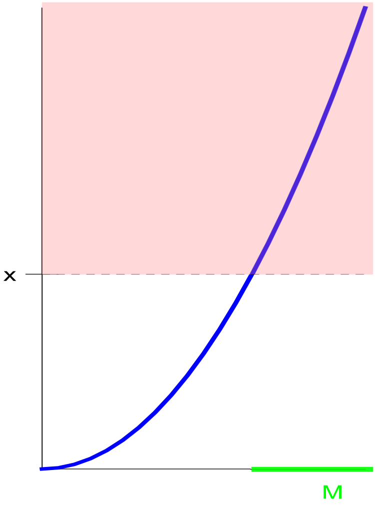
- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$

Existence druhé odmocniny



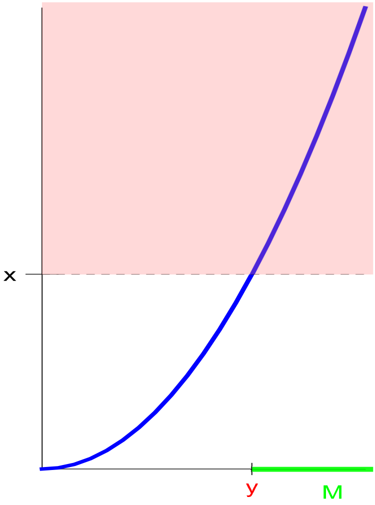
- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$

Existence druhé odmocniny



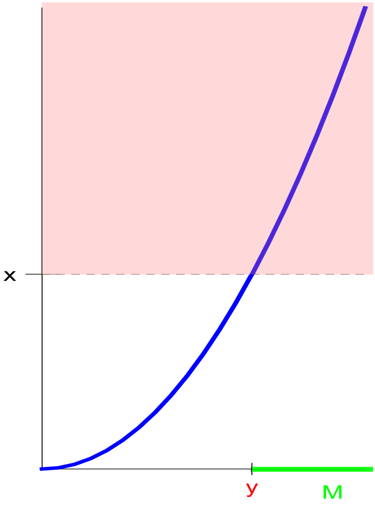
- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.

Existence druhé odmocniny



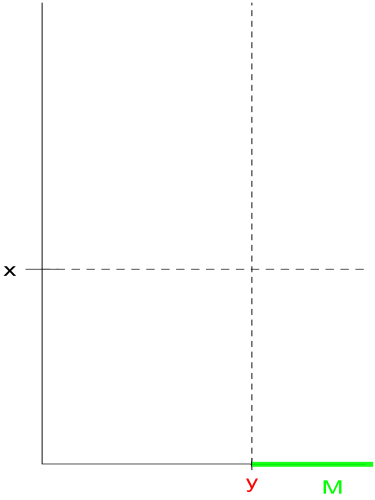
- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M$

Existence druhé odmocniny



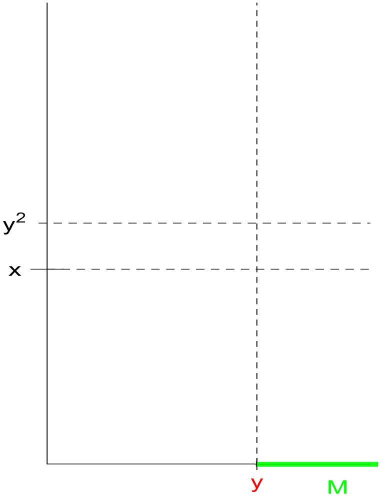
- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

Existence druhé odmocniny



- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

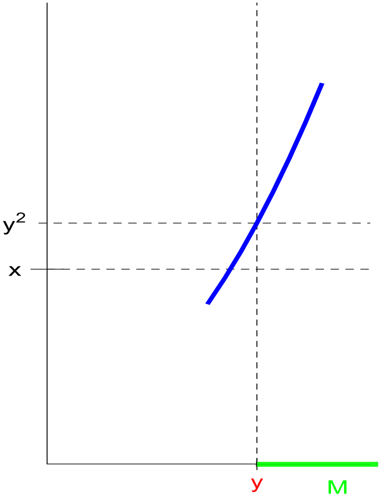
Existence druhé odmocniny



- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

  (a) $y^2 > x$

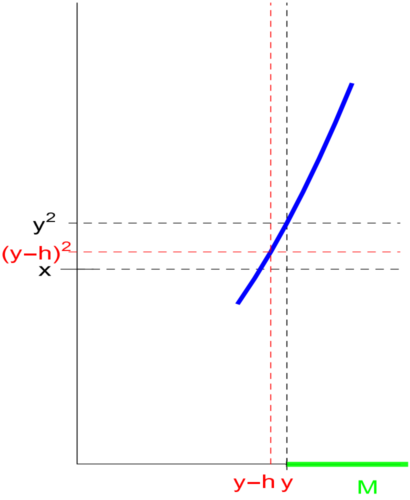
Existence druhé odmocniny



- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

  (a) $y^2 > x$

Existence druhé odmocniny

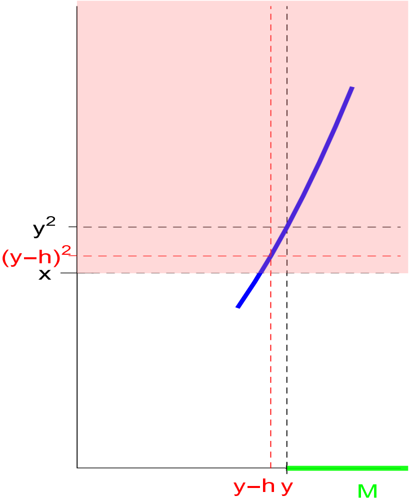


- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

  (a) $y^2 > x$

  $\Rightarrow \exists h \in (0, y) : (y-h)^2 > x$

Existence druhé odmocniny



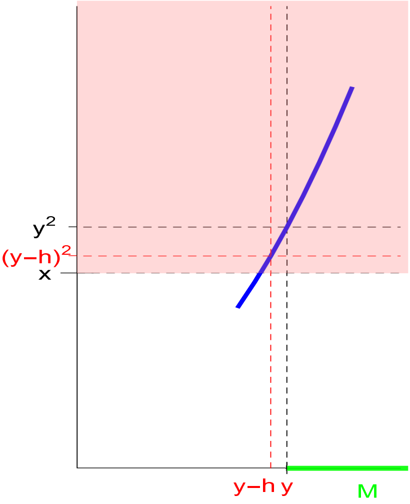
- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

  (a) $y^2 > x$

  $\Rightarrow \exists h \in (0, y) : (y-h)^2 > x$

  $\Rightarrow y - h \in M, y - h < y$

Existence druhé odmocniny



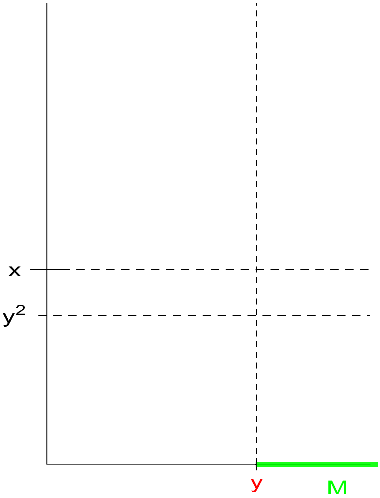
- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

  (a) $y^2 > x$

  $\Rightarrow \exists h \in (0, y) : (y - h)^2 > x$

  $\Rightarrow y - h \in M, y - h < y \Rightarrow$ spor

Existence druhé odmocniny



- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

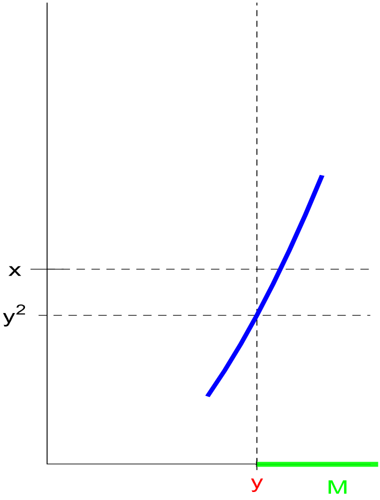
  (a) $y^2 > x$

  $\Rightarrow \exists h \in (0, y) : (y - h)^2 > x$

  $\Rightarrow y - h \in M, y - h < y \Rightarrow$ spor

  (b) $y^2 < x$

Existence druhé odmocniny



- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

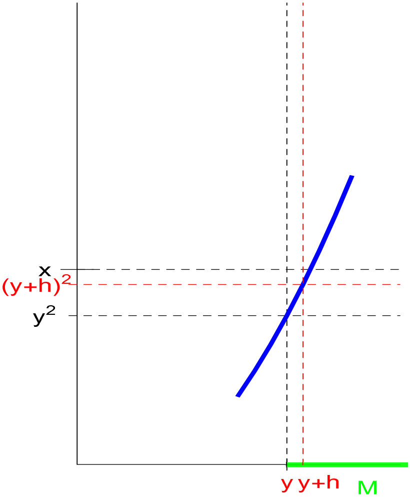
  (a) $y^2 > x$

  $\Rightarrow \exists h \in (0, y) : (y - h)^2 > x$

  $\Rightarrow y - h \in M, y - h < y \Rightarrow$ spor

  (b) $y^2 < x$

Existence druhé odmocniny



- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

  (a) $y^2 > x$

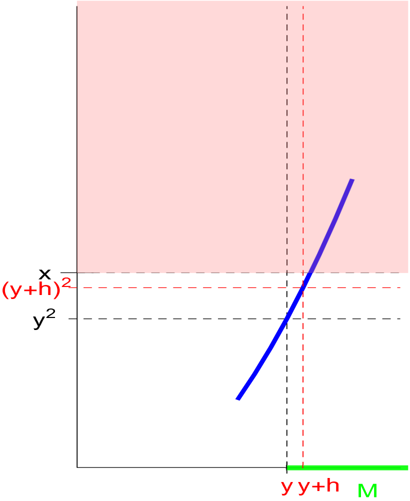
  $\Rightarrow \exists h \in (0, y) : (y - h)^2 > x$

  $\Rightarrow y - h \in M, y - h < y \Rightarrow$ spor

  (b) $y^2 < x$

  $\Rightarrow \; \exists h > 0 : (y + h)^2 < x$

Existence druhé odmocniny



- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

  (a) $y^2 > x$

  $\Rightarrow \exists h \in (0, y) : (y - h)^2 > x$

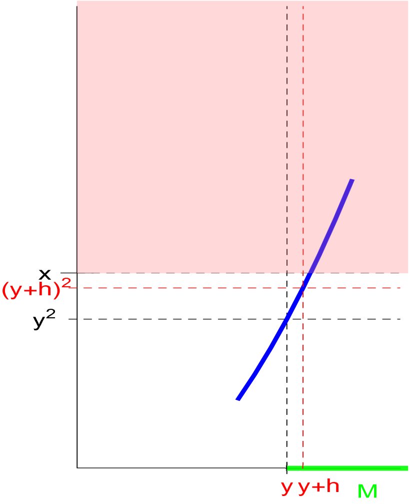
  $\Rightarrow y - h \in M, y - h < y \Rightarrow$ spor

  (b) $y^2 < x$

  $\Rightarrow \exists h > 0 : (y + h)^2 < x$

  $\Rightarrow \langle y, y + h\rangle \cap M = \emptyset$

Existence druhé odmocniny



- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

  (a) $y^2 > x$

  $\Rightarrow \exists h \in (0, y) : (y - h)^2 > x$

  $\Rightarrow y - h \in M, y - h < y \Rightarrow$ spor

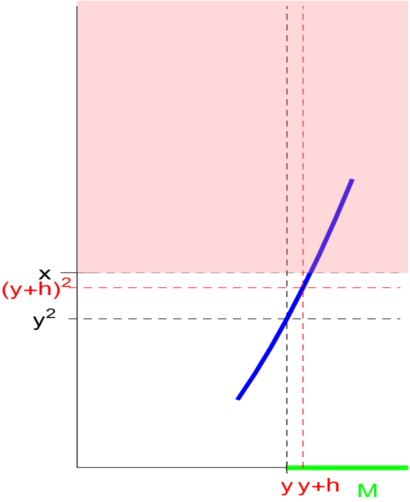
  (b) $y^2 < x$

  $\Rightarrow \ \exists h > 0 : (y + h)^2 < x$

  $\Rightarrow \langle y, y + h\rangle \cap M = \emptyset$

  $\Rightarrow y + h$ je dolní závora M

Existence druhé odmocniny



- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

(a) $y^2 > x$

$\Rightarrow \exists h \in (0, y) : (y - h)^2 > x$

$\Rightarrow y - h \in M, y - h < y \Rightarrow$ spor

(b) $y^2 < x$

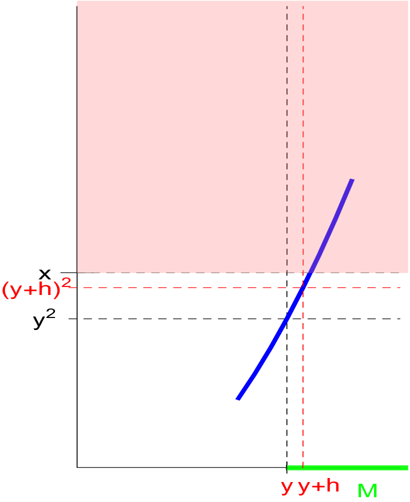
$\Rightarrow \exists h > 0 : (y + h)^2 < x$

$\Rightarrow \langle y, y + h\rangle \cap M = \emptyset$

$\Rightarrow y + h$ je dolní závora M

$\Rightarrow$ spor

Existence druhé odmocniny



- Nechť $x > 0$.
- $M = \{z \in \langle 0, +\infty); z^2 \geq x\}$
- M je zdola omezená a neprázdná.
- $y = \inf M \Rightarrow y^2 = x$

  (a) $y^2 > x$

  $\Rightarrow \exists h \in (0, y) : (y-h)^2 > x$

  $\Rightarrow y - h \in M, y - h < y \Rightarrow$ spor

  (b) $y^2 < x$

  $\Rightarrow \exists h > 0 : (y+h)^2 < x$

  $\Rightarrow \langle y, y+h \rangle \cap M = \emptyset$

  $\Rightarrow y + h$ je dolní závora M

  $\Rightarrow$ spor