VIII.1 Zachovávání úhlů

Definice.

- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ označme $A(z) = \frac{z}{|z|}$.
- Nechť $f : U(a, R) \to \mathbb{C}$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Řekneme, že zobrazení f **zachovává úhly** v bodě a, pokud pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita

  $$v(t) = \lim_{r \to 0+} A(f(a + re^{it}) - f(a))$$

  a pro každá $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ platí

  $$\frac{v(t_1)}{v(t_2)} = \frac{e^{it_1}}{e^{it_2}}.$$

Poznámka. Zobrazení f zachovává úhly v bodě a, právě když pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita

$$\lim_{r \to 0+} A(f(a + re^{it}) - f(a))e^{-it},$$

a její hodnota nezávisí na t.

Větička 1. *Nechť f je komplexní funkce definovaná na $U(a, R)$.*

(i) *Jestliže $f'(a)$ existuje a je různá od 0, pak f zachovává úhly v bodě a.*

(ii) *Jestliže f zachovává úhly v bodě a a funkce $\tilde{f}(x, y) = (\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy))$ má v bodě $(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)$ nenulový totální diferenciál, pak existuje $f'(a)$ (a je různá od 0).*

(iii) *Je-li f holomorfní v bodě a a $f'(a) = 0$, pak f nezachovává úhly v bodě a.*

Důsledek. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in H(G)$. Pak f zachovává úhly v každém bodě G, právě když f' nenabývá nuly na G.*