VI.2 Globální Cauchyova věta

Lemma 1. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina a* f *je funkce holomorfní na* Ω. *Pak funkce* $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ *definovaná předpisem*

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z,w \in \Omega, z \neq w, \\ f'(z), & z,w \in \Omega, z = w, \end{cases}$$

je spojitá na $\Omega \times \Omega$.

Věta 2 (globální Cauchyova věta a Cauchyův vzorec). *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina,* Γ *cykl takový, že* $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$ *a pro každé* $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ *je* $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. *Pak pro každou funkci* f *holomorfní na* Ω *platí*

$$\int_\Gamma f = 0$$

a

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega \setminus \langle\Gamma\rangle.$$

Poznámky:

(1) Je-li Γ cykl v Ω a platí $\int_\Gamma f = 0$ pro každou f holomorfní v Ω, pak $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$ pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

(2) Je-li $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ je souvislá, jsou předpoklady Věty 2 splněny pro každý cykl v Ω.

Věta 3 (obecná reziduová věta). *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina,* Γ *cykl takový, že* $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$ *a pro každé* $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ *je* $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. *Nechť* $M \subset \Omega$ *je izolovaná v* Ω, $M \cap \langle\Gamma\rangle = \emptyset$ *a* f *je funkce holomorfní v* $\Omega \setminus M$. *Pak platí:*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{ind}_\Gamma a \cdot \operatorname{res}_a f.$$

V sumě na pravé straně přitom je jen konečně mnoho nenulových sčítanců.