

VI.3 Meromorfní funkce

Definice. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná otevřená množina.

- (i) Symbolem $H(G)$ budeme značit množinu všech komplexních funkcí holomorfních na G .
- (ii) Funkce $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ se nazývá **meromorfní**, jestliže je spojitá na G a existuje množina $M \subset G$, která je izolovaná v G (tj. nemá v G hromadný bod), taková, že f je holomorfní na $G \setminus M$.
- (iii) Množinu všech funkcí meromorfních na G značíme $M(G)$.

Poznámka. V bodech výjimečné množiny M z definice má meromorfní funkce **nejvýše pól** (tj. buď pól nebo odstranitelnou singularitu).

Větička 4. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná otevřená množina a $f, g \in M(G)$.

- Existuje právě jedna $u \in M(G)$ taková, že rovnost $u(z) = f(z) + g(z)$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G .
- Existuje právě jedna $v \in M(G)$ taková, že rovnost $v(z) = f(z) \cdot g(z)$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G .
- Existuje právě jedna $w \in M(G)$ taková, že rovnost $w(z) = f'(z)$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G .

Poznámka. Funkci u nazýváme **součtem** funkcí $f, g \in M(G)$ a píšeme $u = f + g$. Funkci v nazýváme **součinem** funkcí $f, g \in M(G)$ a píšeme $u = f \cdot g = fg$. Analogicky definujeme násobek meromorfní funkce komplexním číslem a rozdíl dvou meromorfních funkcí. Funkci w nazýváme **derivací** funkce $f \in M(G)$ a píšeme $w = f'$. Analogicky definujeme druhou derivaci i vyšší derivace.

Věta 5 (o jednoznačnosti). Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je oblast, $f, g \in M(G)$ jsou takové, že množina

$$\{z \in G : f(z) = g(z)\}$$

není izolovaná v G . Pak $f = g$.

Větička 6. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná oblast a $f, g \in M(G)$, přičemž g není konstantní nulová funkce. Pak existuje právě jedna $w \in M(G)$ taková, že rovnost $w(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ platí pro všechna $z \in G$ s výjimkou bodů nějaké množiny izolované v G . Tuto funkci w nazýváme **podílem** funkcí f a g , píšeme $w = \frac{f}{g}$.

Důsledek. Je-li $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ neprázdná oblast, pak $M(G)$ s výše uvedenými operacemi sčítání a násobení je komutativní těleso.

Větička 7. Funkce meromorfní na $\overline{\mathbb{C}}$ je funkce racionální.