VI.5 Celé funkce a funkce meromorfní na $\mathbb{C}$

Lemma 17. *Nechť A je neprázdná množina a (u_n) posloupnost omezených komplexních funkcí definovaných na A taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ konverguje stejnoměrně na množině A. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $z \in A$ označme*

$$f_n(z) = \prod_{j=1}^{n} (1 + u_j(z)) = (1 + u_1(z)) \cdot (1 + u_2(z)) \cdots (1 + u_n(z)).$$

Pak platí:

(a) *Funkce f_n konvergují stejnoměrně na A k nějaké funkci f. (Píšeme $f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + u_j(z))$.)*
(b) *Pro každou permutaci (n_j) přirozených čísel platí*

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + u_{n_j}(z)), \qquad z \in A.$$

(c) *Je-li $f(z_0) = 0$ pro nějaké $z_0 \in A$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které $u_n(z_0) = -1$.*

Značení. Pro $z \in \mathbb{C}$ položme

$$\mathcal{E}_0(z) = 1 - z,$$
$$\mathcal{E}_m(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^m}{m} \right), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Lemma 18. *Pro $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $|z| \leq 1$ platí $|1 - \mathcal{E}_m(z)| \leq |z|^{m+1}$.*

Věta 19 (Weierstrassova věta o faktorizaci). *Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, (z_j) je posloupnost komplexních čísel, $z_j \neq 0$ pro $j \in \mathbb{N}$ a $z_j \to \infty$. Položme*

$$f(z) = z^k \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_{j-1}\left(\frac{z}{z_j}\right), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Pak uvedený nekonečný součin konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$, f je celá funkce, která má v nule kořen násobnosti k (pokud $k = 0$, není 0 kořenem) a z_j, $j \in \mathbb{N}$, jsou všechny její nenulové kořeny, přičemž násobnost kořenu $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je rovna počtu výskytů čísla w v posloupnosti (z_j).

Navíc, každá celá funkce s týmiž kořeny včetně násobnosti je tvaru $f(z) \cdot e^{L(z)}$, kde L je celá funkce.

Důsledek. *Každá funkce meromorfní na $\mathbb{C}$ je podílem dvou celých funkcí.*

Věta 20 (Mittag-Leffler). *Nechť (z_j) je prostá posloupnost komplexních čísel splňující*

$$0 = |z_0| < |z_1| \le |z_2| \le |z_3| \le \dots$$

a $z_j \to \infty$; $H_0, H_1, H_2, \dots$ jsou polynomy splňující $H_j(0) = 0$ pro $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak existují polynomy $P_1, P_2, \dots$ takové, že položíme-li

$$f(z) = H_0(\frac{1}{z}) + \sum_{j=1}^{\infty}(H_j(\frac{1}{z - z_j}) - P_j(z)),$$

pak uvedená řada konverguje v následujícím smyslu: Pro každé $R > 0$ tato řada, z níž vynecháme ty členy, pro které je $|z_j| \le R$, konverguje stejnoměrně na $\overline{U(0,R)}$. Výsledná funkce f je meromorfní na $\mathbb{C}$, je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{z_j : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, hlavní část Laurentova rozvoje v prstencovém okolí bodu z_j je $H_j(\frac{1}{z-z_j})$ (pro $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

Věta 21 (Cauchyova metoda). *Nechť f je meromorfní na $\mathbb{C}$, póly má právě v bodech z_j, $j \in \mathbb{N}$, kde (z_j) je prostá posloupnost splňující $z_j \to \infty$ a*

$$0 < |z_1| \le |z_2| \le |z_3| \le \dots,$$

přičemž hlavní část Laurentova rozvoje v prstencovém okolí bodu z_j je $H_j(\frac{1}{z-z_j})$, kde H_j je polynom (pro $j \in \mathbb{N}$). Předpokládejme dále, že existují posloupnosti kladných čísel (R_n) a (ε_n), $C > 0$ a $\Lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tak, že platí

- $R_n \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$;
- $|f(z)| \le \varepsilon_n |z|^{\Lambda+1}$ *pro* $|z| = R_n$.

Pak platí

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\Lambda} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \lim_{n\to\infty} \sum_{|z_j| < R_n} (H_j(\frac{1}{z - z_j}) - P_j(z)), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_j : j \in \mathbb{N}\},$$

kde P_j je součet prvních $\Lambda + 1$ členů Taylorova rozvoje funkce $H_j(\frac{1}{z-z_j})$ v okolí bodu 0.

Poznámka. Analogie Věty 19, jejího důsledku a Věty 20 platí pro libovolnou vlastní otevřenou podmnožinu $\overline{\mathbb{C}}$.