VII.1 Algebra holomorfních funkcí – základní vlastnosti

Připomenutí: Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, značí $H(G)$ množinu všech holomorfních funkcí na G. Dále nechť $C(G)$ značí množinu všech komplexních spojitých funkcí na G.
Poznámka: $C(G)$ a $H(G)$ jsou algebry (s obvyklými operacemi), je-li G oblast, je $H(G)$ navíc obor integrity.

Definice. Nechť (f_n) je posloupnost funkcí z $C(G)$. Řekneme, že f_n **konverguje k funkci f v prostoru** $C(G)$ (píšeme $f_n \to f$ v $C(G)$), jestliže funkce f_n konvergují k f lokálně stejnoměrně na množině G. Pokud jsou uvažované v funkce v $H(G)$, říkáme, že $f_n \to f$ v $H(G)$.

Větička 1. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina.*

(i) *Pokud $f_n \to f$ a $g_n \to g$ v $C(G)$ a $\alpha_n \to \alpha$ a $\beta_n \to \beta$ v $\mathbb{C}$, pak $\alpha_n f_n + \beta_n g_n \to \alpha f + \beta g$ v $C(G)$.*
(ii) *Pokud $f_n \to f$ a $g_n \to g$ v $C(G)$, pak $f_n g_n \to fg$ v $C(G)$.*

Lemma 2. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina. Pak existuje posloupnost neprázdných kompaktních množin $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující podmínky:*

(i) $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$,
(ii) $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ *pro* $n \in \mathbb{N}$,
(iii) *Pro každou kompaktní $K \subset G$ existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že $K \subset K_n$.*
(iv) *Každá komponenta množiny $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ obsahuje nějakou komponentu množiny $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$.*

Poznámka. Podmínka (i) je důsledkem podmínky (iii). Podmínka (iii) plyne z podmínek (i) a (ii).

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a (K_n) je posloupnost kompaktních množin z Lemmatu 2.

- Je-li $K \subset G$ kompaktní, označme

$$\varphi_K(f) = \sup\{|f(z)| : z \in K\}, \qquad f \in C(G).$$

- Je-li $n \in \mathbb{N}$, označme $\varphi_n = \varphi_{K_n}$.
- Pro $f, g \in C(G)$ položme

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, \varphi_n(f-g)\}.$$

Větička 3. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina.*

(a) *φ_K je pseudonorma na $C(G)$ pro každou $K \subset G$ kompaktní.*
(b) *ρ je metrika na $C(G)$.*
(c) *Nechť (f_n) je posloupnost funkcí v $C(G)$ a $f \in C(G)$. Pak platí: $f_n \to f$ v $C(G) \Leftrightarrow \varphi_K(f_n - f) \to 0$ pro každou $K \subset G$ kompaktní $\Leftrightarrow \rho(f_n, f) \to 0$.*
(d) *Metrický prostor $(C(G), \rho)$ je separabilní a úplný. $H(G)$ je jeho uzavřený podprostor.*

Poznámky.

(1) Je-li G neprázdná otevřená množina, budeme vždy uvažovat nějakou pevnou posloupnost (K_n) splňující podmínky z Lemmatu 2 a $C(G)$ i $H(G)$ budeme vždy uvažovat s metrikou ρ.
(2) $(C(G), \rho)$ je **lineární metrický prostor**, tj. metrika ρ je invariantní vůči posunutí a operace jsou spojité (Větička 1(i)). Navíc existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami, je to tedy **lokálně konvexní prostor**. Totéž platí pro podprostor $(H(G), \rho)$.
(3) Pokud (K'_n) je jiná posloupnost splňující podmínky z Lemmatu 2, pak jí příslušná metrika ρ' je ekvivalentní ρ.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a $M \subset C(G)$. Řekneme, že M je **omezená v** $C(G)$, jestliže pro každou $U \subset C(G)$, která je okolím 0, existuje $\lambda > 0$, pro které $M \subset \lambda U$.

Pokud M je omezená v $C(G)$ a navíc $M \subset H(G)$, říkáme, že M je **omezená v** $H(G)$.

Poznámka. $M \subset C(G)$ je omezená v $C(G)$ $\Leftrightarrow$ funkce z M jsou stejně omezené na každé z množin K_n $\Leftrightarrow$ funkce z M jsou lokálně stejně omezené (tj. každý bod z G má okolí, na kterém jsou stejně omezené)

Věta 4 (Stieltjes-Osgood). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a (f_n) je posloupnost lokálně stejně omezených funkcí z $H(G)$ (tj. posloupnost (f_n) je omezená v $H(G)$). Pak existuje vybraná posloupnost (f_{n_k}), která konverguje v $H(G)$.*

Důsledek. *Podmnožina $M \subset H(G)$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená v $H(G)$.*

Poznámka. Pro prostor $C(G)$ Věta 4 ani její důsledek neplatí.