VIII.3 Konformní ekvivalence

Lemma 7 (Schwarzovo). *Nechť f je holomorfní na $U(0,1)$ splňující $f(0) = 0$ a $|f(z)| \le 1$ pro všechna $z \in U(0,1)$. Pak platí*

- $|f(z)| \le |z|$ *pro každé* $z \in U(0,1)$,
- $|f'(0)| \le 1$.

Jestliže navíc buď $|f'(0)| = 1$ nebo alespoň pro jedno $z \in P(0,1)$ platí $|f(z)| = |z|$, pak existuje takové $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, že $f(z) = \alpha z$ pro všechna $z \in U(0,1)$.

Věta 8 (Riemannova). *Nechť $G \subsetneqq \mathbb{C}$ je oblast, pro kterou $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ je souvislá. Pak existuje konformní zobrazení G na $U(0,1)$.*

Definice. Oblasti $G_1, G_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ se nazývají **konformně ekvivalentní**, jestliže existuje konformní zobrazení G_1 na G_2.

Poznámka. Z Věty 5 plyne, že každé dvě oblasti $G_1, G_2 \subsetneqq \mathbb{C}$ se souvislým doplňkem v $\overline{\mathbb{C}}$ jsou konformně ekvivalentní.

Důsledek 9. *Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je oblast (tj. otevřená souvislá množina), pro kterou $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ je souvislá. Pak platí:*

(1) *G je konformně ekvivalentní $\overline{\mathbb{C}}$, právě když $G = \overline{\mathbb{C}}$.*
(2) *G je konformně ekvivalentní $\mathbb{C}$, právě když $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ obsahuje právě jeden bod.*
(3) *G je konformně ekvivalentní $U(0,1)$, právě když $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ obsahuje aspoň dva body.*

Poznámka. Pro oblasti s nesouvislým doplňkem v $\overline{\mathbb{C}}$ je situace složitější. Například platí netriviální tvrzení:

(1) Mezikruží $P(a_1, r_1, R_1)$ a $P(a_2, r_2, R_2)$ (kde $a_j \in \mathbb{C}$, $0 < r_j < R_j < +\infty$ pro $j = 1, 2$) jsou konformně ekvivalentní, právě když $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$.
(2) Nechť $1 < R < +\infty$. Pak každé konformní zobrazení mezikruží $P(0, 1, R)$ na sebe je buď tvaru $f(z) = \alpha z$, kde $|\alpha| = 1$, nebo tvaru $f(z) = \frac{\alpha R}{z}$, kde $|\alpha| = 1$.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Řekneme, že Ω je **jednoduše souvislá**, pokud pro každou uzavřenou křivku $\varphi : [0,1] \to \Omega$ existuje spojité zobrazení $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ s vlastnostmi

(1) $H(0,t) = \varphi(t)$ pro $t \in [0,1]$,
(2) $H(s,0) = H(s,1)$ pro $s \in [0,1]$,
(3) zobrazení $H(1,\cdot)$ je konstantní na $[0,1]$;

tj., pokud každá uzavřená křivka v Ω je v Ω homotopická s konstantní křivkou.

Věta 10 (charakterizace jednoduše souvislých oblastí). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) *Ω je homeomorfní jednotkovému kruhu $U(0,1)$.*
(b) *Ω je jednoduše souvislá.*
(c) *Pro každou uzavřenou cestu φ v Ω a každý bod $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\varphi z = 0$.*
(d) *Množina $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ je souvislá.*
(e) *Polynomy jsou husté v $H(\Omega)$.*
(f) *Pro každou uzavřenou cestu φ v Ω a každou $f \in H(\Omega)$ platí $\int_\varphi f = 0$.*
(g) *Každá holomorfní funkce na Ω má v Ω primitivní funkci.*
(h) *Pro každou $f \in H(\Omega)$, která na Ω nenabývá nuly, existuje $g \in H(\Omega)$ splňující $f(z) = \exp(g(z))$, $z \in \Omega$.*
(i) *Pro každou $f \in H(\Omega)$, která na Ω nenabývá nuly, existuje $h \in H(\Omega)$ splňující $f(z) = h(z)^2$, $z \in \Omega$.*