## Věta VI.7 (Rouchéova věta pro kompakt)

$K \subset \mathbb{C}$ kompaktní, $\Omega = \operatorname{Int} K$, $f, g : K \to \overline{\mathbb{C}}$ spojité, obě meromorfní na $\Omega$. Nechť platí

$$(*) \quad \forall z \in \partial K : |f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

Pak

$$\sum_{a \in \Omega, f(a)=0} N_f(a) - \sum_{a \in \Omega, f(a)=\infty} P_f(a) = \sum_{a \in \Omega, g(a)=0} N_g(a) - \sum_{\substack{a \in \Omega \\ g(a)=\infty}} P_g(a)$$

Důkaz: $\boxed{1}$ $f$ ani $g$ nenabývají na $\partial K$ hodnot $0$ ani $\infty$

⌈plyne z $(*)$⌋

$\boxed{2}$ $L := \{z \in K;\ f(z) = \infty$ nebo $g(z) = \infty$ nebo $|f(z) - g(z)| \geq |f(z)|\}$

Pak platí:

(a) $L \subset \Omega$ ⌈z $(*)$ a $\boxed{1}$⌋

(b) $L$ je kompaktní

⌈$z \in K \setminus L \Rightarrow f(z) \in \mathbb{C}, g(z) \in \mathbb{C}, |f(z) - g(z)| < |f(z)|$

$f, g$ spojité $\Rightarrow \exists r > 0\ \forall y \in U(z, r) \cap K$:

$f(y) \in \mathbb{C}, g(y) \in \mathbb{C}, |f(y) - g(y)| < |f(y)|$

$\Rightarrow U(z, r) \cap K \subset K \setminus L$

$\Rightarrow K \setminus L$ je rel. otevřená v $K$

$\Rightarrow L$ je uzavřená, a tedy kompaktní⌋

(c) Všechny kořeny a póly $f$ a $g$ leží v $L$

⌈póly z definice, kořeny z definující nerovnosti⌋

$\boxed{3}$ $G$ buď komponenta $\Omega$. Pak $L_G := L \cap G$ je kompaktní podmnožina $G$

⌈$\Omega \setminus G$ je též otevřená, sjednocení ostatních komponent⌋

Nechť $\Gamma_G$ buď cykl v $G$ okolo $L_G$ (viz Věta V.1)

Aplikujme Větu VI.6 na $f, g, G, \Gamma_G$. Předpoklady jsou splněny (díky vlastnostem $\Gamma_G$ a tomu, že $\langle \Gamma_G \rangle \subset G \setminus L$).
Navíc každý pól či kořen $f$ či $g$ v $G$ leží v $L_G$, a tedy je v něm index vůči $\Gamma_G$ roven $1$.

Proto z Věty VI.6 plyne

$$\sum_{a\in G,\, f(a)=0} N_f(a) - \sum_{a\in G\, f(a)=\infty} P_f(a) = \sum_{a\in G,\, g(a)=0} N_g(a) - \sum_{a\in G,\, g(a)=\infty} P_g(a)$$

$\boxed{4}$ Zbývá sečíst přes všechny komponenty.

( Stačí uvažovat ty, pro které $L \cap G \neq \emptyset$. A těch je konečně mnoho

[ $G$, $G$ komponenta $\Omega$, je disjunktní systém otevřených množin pokrývající $L$
$\Rightarrow \exists\, G_1, \dots, G_n$ komponenty $\Omega$ : $L \subset G_1 \cup \dots \cup G_n$ ]

v ostatních nejsou ani kořeny ani póly )