

VII. Algebra holomorfních funkcí

VII.1 Metrická struktura algeber $H(G)$ a $C(G)$

Připomenutí: Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, značí $H(G)$ množinu všech holomorfních funkcí na G . Dále nechť $C(G)$ značí množinu všech komplexních spojitých funkcí na G .

Poznámka: $C(G)$ a $H(G)$ jsou algebry (s obvyklými operacemi), je-li G oblast, je $H(G)$ navíc obor integrity.

Definice. Nechť (f_n) je posloupnost funkcí z $C(G)$. Řekneme, že f_n **konverguje k funkci f v prostoru $C(G)$** (píšeme $f_n \rightarrow f$ v $C(G)$), jestliže funkce f_n konvergují k f lokálně stejnoměrně na množině G . Pokud jsou uvažované v funkce v $H(G)$, říkáme, že $f_n \rightarrow f$ v $H(G)$.

Větička 1. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina.

- (i) Pokud $f_n \rightarrow f$ a $g_n \rightarrow g$ v $C(G)$ a $\alpha_n \rightarrow \alpha$ a $\beta_n \rightarrow \beta$ v \mathbb{C} , pak $\alpha_n f_n + \beta_n g_n \rightarrow \alpha f + \beta g$ v $C(G)$.
- (ii) Pokud $f_n \rightarrow f$ a $g_n \rightarrow g$ v $C(G)$, pak $f_n g_n \rightarrow f g$ v $C(G)$.

Lemma 2. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina. Pak existuje posloupnost neprázdných kompaktních množin $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující podmínky:

- (i) $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$,
- (ii) $K_n \subset \text{Int } K_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$,
- (iii) Pro každou kompaktní $K \subset G$ existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že $K \subset K_n$.
- (iv) Každá komponenta množiny $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ obsahuje nějakou komponentu množiny $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$.

Poznámka. Podmínka (i) je důsledkem podmínky (iii). Podmínka (iii) plyne z podmínek (i) a (ii).

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a (K_n) je posloupnost kompaktních množin z Lemmatu 2.

- Je-li $K \subset G$ kompaktní, označme

$$\varphi_K(f) = \sup\{|f(z)| : z \in K\}, \quad f \in C(G).$$

- Je-li $n \in \mathbb{N}$, označme $\varphi_n = \varphi_{K_n}$.
- Pro $f, g \in C(G)$ položme

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, \varphi_n(f - g)\}.$$

Větička 3. Necht' $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina.

- (a) φ_K je pseudonorma na $C(G)$ pro každou $K \subset G$ kompaktní.
- (b) ρ je metrika na $C(G)$.
- (c) Necht' (f_n) je posloupnost funkcí v $C(G)$ a $f \in C(G)$. Pak platí:
 $f_n \rightarrow f$ v $C(G) \Leftrightarrow \varphi_K(f_n - f) \rightarrow 0$ pro každou $K \subset G$ kompaktní
 $\Leftrightarrow \rho(f_n, f) \rightarrow 0$.
- (d) Metrický prostor $(C(G), \rho)$ je separabilní a úplný. $H(G)$ je jeho uzavřený podprostor.

Poznámky.

- (1) Je-li G neprázdná otevřená množina, budeme vždy uvažovat nějakou pevnou posloupnost (K_n) splňující podmínky z Lemmatu 2 a $C(G)$ i $H(G)$ budeme vždy uvažovat s metrikou ρ .
- (2) $(C(G), \rho)$ je **lineární metrický prostor**, tj. metrika ρ je invariantní vůči posunutí a operace jsou spojité (Větička 1(i)). Navíc existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami, je to tedy **lokálně konvexní prostor**. Totéž platí pro podprostor $(H(G), \rho)$.
- (3) Pokud (K'_n) je jiná posloupnost splňující podmínky z Lemmatu 2, pak jí příslušná metrika ρ' je ekvivalentní ρ .

Definice. Necht' $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a $M \subset C(G)$. Řekneme, že M je **omezená v $C(G)$** , jestliže pro každou $U \subset C(G)$, která je okolím 0, existuje $\lambda > 0$, pro které $M \subset \lambda U$.

Pokud M je omezená v $C(G)$ a navíc $M \subset H(G)$, říkáme, že M je **omezená v $H(G)$** .

Poznámka. $M \subset C(G)$ je omezená v $C(G) \Leftrightarrow$ funkce z M jsou stejně omezené na každé z množin $K_n \Leftrightarrow$ funkce z M jsou lokálně stejně omezené (tj. každý bod z G má okolí, na kterém jsou stejně omezené)

Věta 4 (Stieltjes-Osgood). Necht' $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a (f_n) je posloupnost lokálně stejně omezených funkcí z $H(G)$ (tj. posloupnost (f_n) je omezená v $H(G)$). Pak existuje vybraná posloupnost (f_{n_k}) , která konverguje v $H(G)$.

Důsledek. Podmnožina $M \subset H(G)$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená v $H(G)$.

Věta 5 (Osgood). Necht' $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a (f_n) je taková posloupnost funkcí z $H(G)$, že posloupnost $(f_n(z))$ konverguje pro každé $z \in G$. Pak existuje taková otevřená hustá podmnožina $U \subset G$, že funkce $f|_U$ je holomorfní na U a posloupnost $(f_n|_U)$ konverguje k $(f|_U)$ v prostoru $H(U)$.

Poznámka. Pro prostor $C(G)$ Věta 4, její důsledek, ani Věta 5 neplatí.