VIII. Konformní zobrazení

VIII.1 Úhly a jejich zachovávání

Značení, definice a poznámky:

- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ označme $A(z) = \frac{z}{|z|}$.
- Nechť $a, b, c \in \mathbb{C}$, přičemž $a \neq b$ a $a \neq c$. Říkáme, že úsečka ac svírá s úsečkou ab úhel $t \in [0, 2\pi)$, pokud

$$\frac{A(c-a)}{A(b-a)} = e^{it}.$$

- Právě definovaný pojem úhlu odpovídá geometrické představě (orientovaného) úhlu. Speciálně platí:
    - Úsečka ac svírá s úsečkou ab úhel 0, právě když bod c leží na polopřímce ab (tj. $c - a$ je kladným násobkem $b - a$).
    - Úsečka ac svírá s úsečkou ab úhel π, právě když bod c leží na polopřímce opačné k polopřímce ab (tj. $c - a$ je záporným násobkem $b - a$).
    - Úsečka ac svírá s úsečkou ab úhel $\frac{\pi}{2}$ nebo $\frac{3}{2}\pi$, právě když přímky ab a ac jsou na sebe kolmé. Přitom to, který z případů nastává, závisí na orientaci: Úsečka ac svírá s úsečkou ab úhel $\frac{\pi}{2}$, právě když $c - a$ je kladným násobkem $i(b - a)$; a úhel $\frac{3}{2}\pi$, právě když $c - a$ je záporným násobkem $i(b - a)$.
    - Pokud úsečka ac svírá s úsečkou ab úhel $t \in (0, 2\pi)$, pak úsečka ab svírá s úsečkou ac úhel $2\pi - t$.
- Nechť $f : U(a, R) \to \mathbb{C}$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$.
    - Řekneme, že zobrazení f **zachovává úhly** v bodě a, pokud pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita

$$v(t) = \lim_{r \to 0+} A(f(a + re^{it}) - f(a))$$

    a pro každá $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{v(t_1)}{v(t_2)} = \frac{e^{it_1}}{e^{it_2}}.$$

    - Řekneme, že zobrazení f **převrací úhly** v bodě a, pokud pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita $v(t)$ jako výše a pro každá $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{v(t_1)}{v(t_2)} = \frac{e^{it_2}}{e^{it_1}}.$$

Lemma 1. *Nechť $f : U(a,R) \to \mathbb{C}$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$.*

(i) *Zobrazení f zachovává úhly v bodě a, právě když pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita*

$$\lim_{r\to 0+} A(f(a+re^{it}) - f(a))e^{-it},$$

a její hodnota nezávisí na t.

(ii) *Zobrazení f převrací úhly v bodě a, právě když pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita*

$$\lim_{r\to 0+} A(f(a+re^{it}) - f(a))e^{it},$$

a její hodnota nezávisí na t.

(iii) *Zobracení f převrací úhlu v bodě a, právě když zobrazení $\overline{f}$ zachovává úhly v bodě a.*

Příklady 2.

(1) *Funkce $f(z) = \alpha z$, kde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zachovává úhly v každém bodě $\mathbb{C}$.*

(2) *Funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ zachovává úhly v každém bodě $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

(3) *Funkce $f(z) = z^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, nezachovává úhly v bodě 0.*

(4) *Funkce $f(z) = \overline{z}$ převrací úhly v každém bodě $\mathbb{C}$.*

(5) *Funkce $f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ („kruhová inverze“) převrací úhly v každém bodě $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

(6) *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení reprezentované nenulovou maticí $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pak f zachovává úhly (v nějakém bodě, ekvivalentně v každém bodě; $\mathbb{R}^2$ ztotožňujeme s $\mathbb{C}$ standardním způsobem), právě když $a = d$ a $b = -c$.*

Větička 3. *Nechť f je komplexní funkce definovaná na $U(a,R)$.*

(i) *Jestliže $f'(a)$ existuje a je různá od 0, pak f zachovává úhly v bodě a.*

(ii) *Jestliže f zachovává úhly v bodě a a funkce $\tilde{f}(x,y) = (\operatorname{Re} f(x+iy), \operatorname{Im} f(x+iy))$ má v bodě $(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)$ nenulový totální diferenciál, pak existuje $f'(a)$ (a je různá od 0).*

(iii) *Je-li f holomorfní v bodě a a $f'(a) = 0$, pak f nezachovává úhly v bodě a.*

Důsledek. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in H(G)$. Pak f zachovává úhly v každém bodě G, právě když f' nenabývá nuly na G.*