VIII.2 Konformní zobrazení na $\overline{\mathbb{C}}$

Definice. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je otevřená. Řekneme, že zobrazení $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ je **konformní** na G, je-li meromorfní a prosté.

Poznámky.

(1) Je-li f konformní na G, $a \in G \cap \mathbb{C}$ a $f(a) \in \mathbb{C}$, pak $f'(a) \neq 0$.
(2) Je-li f konformní na G, pak má nejvýše jeden pól, a ten je násobnosti 1.
(3) Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, $f \in H(G)$ splňující $f'(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$, pak f je na G lokálně konformní, tj. konformní v nějakém okolí každého bodu.
(4) Je-li f konformní na G, pak zachovává úhly v každém bodě G: Je-li $a \in \mathbb{C}$ a $f(a) \in \mathbb{C}$, pak je zachovávání úhlů definováno výše. V ostatních případech je definice analogická, s tím že:
   (a) je-li $a \in \mathbb{C}$ a $f(a) = \infty$, pak $v(t) = \lim\limits_{r \to 0+} \frac{1}{A(f(a+re^{it}))}$;
   (b) je-li $a = \infty$ a $f(a) \in \mathbb{C}$, pak $v(t) = \lim\limits_{r \to \infty} A(f(re^{-it}) - f(\infty))$;
   (c) je-li $a = \infty$ a $f(a) = \infty$, pak pak $v(t) = \lim\limits_{r \to \infty} \frac{1}{A(f(re^{-it}))}$.

Větička 4. *f je konformní na $\overline{\mathbb{C}}$, právě když na $\overline{\mathbb{C}}$ platí $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ splňují $ad - bc \neq 0$.*

Větička 5. *Je-li f konformní na $\mathbb{C}$, pak lze konformně rozšířit na $\overline{\mathbb{C}}$, a má tedy tvar z Větičky 2.*

Důsledek. *Je-li $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konformní, pak $f(z) = az + b$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.*

Definice. Zobrazení tvaru z Větičky 4 se nazývají **lineární lomená zobrazení**.

Věta 6 (vlastnosti lineárních lomených zobrazení).

(i) *Složení dvou lineárních lomených zobrazení je opět lineární lomené zobrazení. Navíc, pokud koeficienty v definici zobrazení f_1 jsou a_1, b_1, c_1, d_1 a koeficienty v definici zobrazení f_2 jsou a_2, b_2, c_2, d_2, pak koeficienty v definici zobrazení $f_1 \circ f_2$ jsou prvky matice*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Lineární lomená zobrazení s operací skládání tvoří grupu (nekomutativní).*
(iii) *Grupa lineárních lomených zobrazení je generovaná zobrazeními*

$$z \mapsto \lambda z \quad (\textit{kde } \lambda > 0), \quad z \mapsto z + c \quad (\textit{kde } c \in \mathbb{C}),$$
$$z \mapsto \alpha z \quad (\textit{kde } |\alpha| = 1), \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Tedy, každé lineární lomené zobrazení je složení konečně mnoha (nejvýše čtyř) zobrazení uvedeného tvaru.

(iv) *Nechť f je lineární lomené zobrazení a $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ je buď kružnice nebo přímka doplněná bodem ∞. Pak $f(M)$ je také buď kružnice nebo přímka doplněná bodem ∞.*