Některá základní označení

- $\mathbb{R}$ ... množina reálných čísel
- $\mathbb{C}$ ... množina komplexních čísel
- $\overline{\mathbb{C}}$ ... rozšířená komplexní rovina, tj. $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
- $H(G)$ ... algebra všech funkcí holomorfních na G, kde $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná otevřená množina.
- $U(a,r)$ ($a \in \mathbb{C}$, $r > 0$) ... otevřený kruh o středu a a poloměru r
- $P(a,r)$ ($a \in \mathbb{C}$, $r > 0$) ... prstencové okolí $U(a,r) \setminus \{a\}$
- $P(a,r,R)$ ($a \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$)
  ... mezikruží $\{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$
- $\operatorname{ind}_\gamma a$ ... index bodu a vzhledem k uzavřené cestě γ
- $\operatorname{res}_a f$ ... reziduum funkce f v bodě a

I.1 Harmonické funkce v $\mathbb{R}^2$ a jejich vztah k holomorfním

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Funkce $f : G \to \mathbb{R}$ se nazývá **harmonická**, jestliže je spojitá na G a na G splňuje

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Poznámka. Stejně lze definovat i harmonické funkce s hodnotami v $\mathbb{C}$. Pak ovšem f je harmonická, právě když $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ jsou harmonické.

Větička 1. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená.*

(i) *Je-li $f \in H(G)$, pak funkce f_1, f_2 definované předpisem*

$$f_1(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy), \qquad f_2(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

jsou harmonické na G (při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$).

(ii) *Nechť $f : G \to \mathbb{R}$ je harmonická (při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$). Je-li navíc $f \in C^2(G)$, pak platí:*

- *Funkce*

$$g(x+iy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

je holomorfní na G.

- *Je-li G jednoduše souvislá, pak existuje $\tilde{f} \in H(G)$, splňující $\operatorname{Re} \tilde{f}(x+iy) = f(x,y)$ na G.*

Důsledek. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f je holomorfní funkce na G, která na G nenabývá nuly. Pak funkce $g(x,y) = \ln|f(x+iy)|$ je harmonická na G (při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$).*

Poznámka. Z Věty 6 níže plyne, že harmonické funkce jsou automaticky třídy C^∞.

Definice. **Poissonovým jádrem** rozumíme funkci definovanou předpisem

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}, \qquad t \in \mathbb{R}, r \in [0,1).$$

Větička 2 (vlastnosti Poissonova jádra).

(i) $P_r(\theta - t) = \operatorname{Re} \frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$ *pro* $r \in [0,1)$, $t, \theta \in \mathbb{R}$.

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,\mathrm{d}t = 1$ *pro* $r \in [0,1)$.

(iii) *Pro každé* $r \in [0,1)$ *je* P_r *kladná sudá* 2π*-periodická funkce; je-li navíc* $r > 0$, *je* P_r *klesající na* $[0,\pi]$.

(iv) *Není-li* t *celočíselným násobkem* 2π, *je* $\lim\limits_{r\to 1-} P_r(t) = 0$.

Poznámka. Symbolem $\mathbb{T}$ značíme jednotkovou kružnici, tj. $\{e^{it}, t \in \mathbb{R}\}$. Funkce na $\mathbb{T}$ přirozeně ztotožňujeme s 2π-peridodickými funkcemi na $\mathbb{R}$, míry na $\mathbb{T}$ s mírami na $[-\pi,\pi)$, případně na $[\alpha, \alpha+2\pi)$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$. Na $\mathbb{T}$ uvažujeme normalizovanou Lebesgueovu míru. Vůči této míře tedy uvažujeme prostory $L^p(\mathbb{T})$.

Definice.

- Nechť $f \in L^1(\mathbb{T})$. **Poissonovým integrálem** funkce f rozumíme funkci $P[f]$ definovanou na $U(0,1)$ předpisem

$$P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad r \in [0,1), \theta \in \mathbb{R}.$$

- Nechť μ je borelovská míra (znaménková, případně komplexní) na $\mathbb{T}$. **Poissonovým integrálem** míry μ rozumíme funkci $P[\,\mathrm{d}\mu]$ definovanou na $U(0,1)$ předpisem

$$P[\,\mathrm{d}\mu](re^{i\theta}) = \int_{[-\pi,\pi)} P_r(\theta - t)\,\mathrm{d}\mu(t), \qquad r \in [0,1), \theta \in \mathbb{R}.$$

Větička 3. *Je-li* μ *komplexní borelovská míra na* $\mathbb{T}$, *je* $P[\,\mathrm{d}\mu]$ *harmonická na* $U(0,1)$. *Speciálně pro* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *je* $P[f]$ *harmonická na* $U(0,1)$.

Navíc, je-li μ *reálná, je* $P[\,\mathrm{d}\mu]$ *reálná funkce. Je-li* μ *nezáporná, je* $P[\,\mathrm{d}\mu]$ *nezáporná funkce. Stejný vztah platí mezi* f *a* $P[f]$.

Větička 4 (varianta reziduové věty). *Nechť* $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ *a* $M \subset U(a,R)$ *je konečná množina. Nechť* f *je komplexní funkce spojitá na*

$\overline{U(a,R)} \setminus M$ a holomorfní na $U(a,R) \setminus M$. Je-li φ kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru R, pak

$$\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{res}_a f.$$

Důsledek (Poissonův integrál pro holomorfní funkce). *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ a f je komplexní funkce spojitá na $\overline{U(a,R)}$ a holomorfní na $U(a,R)$. Pak pro každé $r \in [0,R)$ a každé $\theta \in \mathbb{R}$ platí:*

- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+Re^{it}) \cdot \frac{Re^{it}+re^{i\theta}}{Re^{it}-re^{i\theta}}\,\mathrm{d}t = 2f(a+re^{i\theta}) - f(a)$;
- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+Re^{it}) \cdot \frac{Re^{-it}+re^{-i\theta}}{Re^{-it}-re^{-i\theta}}\,\mathrm{d}t = f(a)$;
- $f(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+Re^{it}) \cdot \operatorname{Re}\frac{Re^{it}+re^{i\theta}}{Re^{it}-re^{i\theta}}\,\mathrm{d}t$.

Věta 5 (řešení Dirichletovy úlohy na kruhu). *Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{T}$. Definujme funkci Hf předpisem*

$$Hf(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(e^{i\theta}), & r = 1, \theta \in \mathbb{R}, \\ P[f](re^{i\theta}), & r \in [0,1), \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pak funkce Hf je spojitá na $\overline{U(0,1)}$ (a také harmonická na $U(0,1)$ a na $\mathbb{T}$ rovna f).

Věta 6 (vyjádření harmonické funkce Poissonovým integrálem). *Nechť f je komplexní funkce spojitá na $\overline{U(0,1)}$, harmonická na $U(0,1)$. Pak $f = P[f|_\mathbb{T}]$ na $U(0,1)$.*

Důsledek.

- *Je-li f komplexní funkce spojitá na $\overline{U(a,R)}$ a harmonická na $U(a,R)$, pak platí pro $r \in [0,R)$ a $\theta \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} f(a+re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2} f(a+Re^{it})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+Re^{it}) \cdot \operatorname{Re}\frac{Re^{it}+re^{i\theta}}{Re^{it}-re^{i\theta}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

- *Reálná harmonická funkce na $U(a,R)$ je reálnou částí holomorfní funkce na $U(a,R)$.*
- *Harmonické funkce jsou třídy C^∞.*
- *Nechť funkce f je spojitá na $\overline{U(a,R)}$ a harmonická na $U(a,R)$. Pak $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+Re^{it})\,\mathrm{d}t$.*

Věta 7 (Harnackova). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je oblast a (f_n) posloupnost harmonických funkcí na G.*

(i) *Jestliže posloupnost (f_n) konverguje lokálně stejnoměrně na G, pak limita je harmonická na G.*

(ii) *Nechť funkce f_n jsou reálné a posloupnost $(f_n(z))$ je neklesající pro každé $z \in G$. Pak buď posloupnost f_n konverguje lokálně stejnoměrně na G nebo $f_n(z) \to +\infty$ pro každé $z \in G$.*

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a f je spojitá na G. Řekneme, že f má **vlastnost průměru**, jestliže pro každé $a \in G$ existuje posloupnost $r_n \searrow 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + r_n e^{it}) \, \mathrm{d}t.$$

Věta 8. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, f je spojitá na G a má vlastnost průměru. Pak f je harmonická na G.*

Věta 9 (Schwarzův princip zrcadlení). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, která je symetrická podle reálné osy. Označme Ω^+ průnik Ω s polorovinou $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ a Ω^- průnik s polorovinou $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Nechť f je holomorfní na Ω^+ a pro každé $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ je*

$$\lim_{z \to x, z \in \Omega^+} \operatorname{Im} f(z) = 0.$$

Pak existuje $F \in H(\Omega)$ taková, že $F = f$ na Ω^+. F navíc splňuje podmínku $F(\overline{z}) = \overline{F(z)}$ pro $z \in \Omega$.