

III.2 Holomorfní funkce více komplexních proměnných

Definice. Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je otevřená množina a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce. Funkce f se nazývá

- **holomorfní na Ω** , jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$ existují koeficienty c_α , $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takové, že pro \mathbf{y} z nějakého okolí bodu \mathbf{x} platí

$$f(\mathbf{y}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha (\mathbf{y} - \mathbf{x})^\alpha.$$

- **odděleně holomorfní na Ω** , jestliže pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ a každou volbu $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ je funkce

$$z \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

holomorfní na svém definičním oboru.

Poznámka. Funkce f je odděleně holomorfní na Ω , právě když má v každém bodě množiny Ω parciální derivace podle všech proměnných.

Definice. Necht' X_1, \dots, X_n a Y jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ se nazývá **odděleně spojitě**, jestliže jestliže pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ a každou volbu $x_k \in X_k$, $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ je zobrazení

$$x \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

spojité na X_j .

Lemma 6.

- (1) Necht' X, Y, Z jsou metrické prostory, přičemž prostor X je separabilní. Necht' $f : X \times Y \rightarrow Z$ splňuje podmínky
 - Pro každé $y \in Y$ je zobrazení $x \mapsto f(x, y)$ spojitě na X .
 - Pro každé $x \in X$ je zobrazení $y \mapsto f(x, y)$ borelovsky měřitelné na Y .

Pak f je borelovsky měřitelné na $X \times Y$.

- (2) Necht' X_1, \dots, X_n jsou separabilní metrické prostory, Z metrický prostor a $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Z$ odděleně spojitě zobrazení. Pak f je borelovsky měřitelné.

Značení: Necht' $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ a $\mathbf{r} \in (0, +\infty)^n$. Pak značíme

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \prod_{j=1}^n U(x_j, r_j).$$

Množiny tohoto tvaru nazýváme **polydisk**.

Lemma 7. Necht' f je odděleně holomorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Necht' $\mathbf{x} \in \Omega$ a $\mathbf{r} \in (0, +\infty)^n$ splňují $\overline{\mathbb{P}(\mathbf{x}, \mathbf{r})} \subset \Omega$. Pak pro každé $\mathbf{y} \in \mathbb{P}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ platí

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_0^{2\pi} \left(\cdots \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{f(x_1+r_1 e^{it_1}, x_2+r_2 e^{it_2}, \dots, x_n+r_n e^{it_n})}{(x_1+r_1 e^{it_1}-y_1)(x_2+r_2 e^{it_2}-y_2)\cdots(x_n+r_n e^{it_n}-y_n)} \cdot r_1 \cdots r_n \cdot i^n \cdot e^{i(t_1+\cdots+t_n)} dt_1 \right) dt_2 \cdots \right) dt_n$$

Věta 8. Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je otevřená množina a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funkce. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

- (1) f je holomorfní na Ω .
- (2) f má v každém bodě Ω Fréchetovu derivaci (tj. totální diferenciál).
- (3) f je odděleně holomorfní a lokálně omezená na Ω .
- (4) Pro každý polydisk $\mathbb{P}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$, jehož uzávěr je obsažen v Ω , platí, že f je omezená na kartézském součinu příslušných kružnic a pro každé $\mathbf{y} \in \mathbb{P}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ platí vzorec

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} \frac{f(x_1+r_1 e^{it_1}, x_2+r_2 e^{it_2}, \dots, x_n+r_n e^{it_n})}{(x_1+r_1 e^{it_1}-y_1)(x_2+r_2 e^{it_2}-y_2)\cdots(x_n+r_n e^{it_n}-y_n)} \cdot r_1 \cdots r_n \cdot i^n \cdot e^{i(t_1+\cdots+t_n)} dt_1 dt_2 \cdots dt_n$$

- (5) Pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$ existuje $\mathbf{r} \in (0, +\infty)^n$ tak, že $\overline{\mathbb{P}(\mathbf{x}, \mathbf{r})} \subset \Omega$ a pro tento polydisk platí závěr předchozího bodu.

Poznámka. Dokonce platí, že každá odděleně holomorfní funkce je již holomorfní. To říká Hartogsova věta, které se budeme věnovat později.

Věta 9. Necht' f je holomorfní funkce na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ je funkce $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} f$ holomorfní na Ω .

Věta 10. Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je otevřená množina a (f_n) je posloupnost holomorfních funkcí na Ω , která konverguje k nějaké funkci f lokálně stejnoměrně na Ω . Pak f je také holomorfní na Ω a navíc pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ funkce $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} f_n$ konvergují k funkci $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} f$ lokálně stejnoměrně na Ω .