Zkouška z Komplexní analýzy 2 (VZOR)
LS 2014-2015

Příklad 1: Nechť $p \in (1, \infty)$. Nechť $f \in L^p(\mathbb{T})$. Ukažte, že funkce $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$ (kde $\widehat{f}(n)$ jsou Fourierovy koeficienty f) patří do prostoru H^p a odhadněte její normu.
Použijte přitom následující větu: Pro reálnou harmonickou funkci f na $\mathbb{D}$ označme $\widetilde{f}$ konjugovanou harmonickou funkci (tj. $\widetilde{f}$ je reálná harmonická funkce na $\mathbb{D}$, $\widetilde{f}(0) = 0$, $f + i\widetilde{f}$ je holomorfní). Nechť $p \in (1, \infty)$. Pak existuje konstanta $C_p > 0$, že $\|\widetilde{f}\|_p \le C_p \|f\|_p$ pro každou reálnou $f \in h_p$ ($\|\cdot\|_p$ označuje normu v h_p).
Návod:

(a) Ukažte, že pro f reálnou platí $\widehat{f}(-n) = \overline{\widehat{f}(n)}$ pro všechna $n \in \mathbf{Z}$.
(b) $P[f]$ nechť označuje Poissonův integrál funkce f. Ukažte, že $P[f] \in h_p$ a $\|P[f]\|_p \le \|f\|_{L^p}$. (Označme q sdružený exponent k p, nechť, $g \in L^q(\mathbb{T})$. Dokažte, že pro každé $r \in [0, 1)$ platí $\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P[f](re^{it}) g(e^{it})\,\mathrm{d}t\right| \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$. Odsud odvoďte nerovnost norem.)
(c) Nyní nechť $f \in L^p(\mathbb{T})$ je pevná reálná funkce. Označme $g = P[f]$ a $G = g + i\widetilde{g}$. S použitím (b) a věty z úvodu k příkladu ukažte, že $G \in H^p$ a napište příslušný odhad normy.
(d) Nechť G^* je funkce vzniklá z G jako ve Větě I.20. Označme $\widetilde{f} = \operatorname{Im} G^*$. S použitím vět z Kapitoly I ukažte, že $\operatorname{Re} G^* = f$ a $P[\widetilde{f}] = \widetilde{g}$. Ukažte, že $\|\widetilde{f}\|_{L^p} \le C_p \|f\|_{L^p}$.
(e) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ je vyjádření G mocninnou řadou na $\mathbb{D}$. Ukažte, že pro $n \ge 0$ je $\widehat{G^*}(n) = a_n$ a pro $n < 0$ je $\widehat{G^*}(n) = 0$. (K druhému tvrzení použijte Větu I.21, k prvnímu definici Fourierových koeficientů, vzorec pro výpočet koeficientů mocninné řady a limitní přechod.)
(f) S použitím (a) a (e) dokažte, že pro $n < 0$ je $\widehat{\widetilde{f}}(n) = i\widehat{f}(n)$, pro $n > 0$ je $\widehat{\widetilde{f}}(n) = i\widehat{f}(n)$ a $\widehat{\widetilde{f}}(n) = 0$. Odtud odvoďte vztah mezi F a G a dokončete důkaz pro případ reálné f.
(g) Případ komplexní f odvoďte z reálného případu pomocí rozkladu na reálnou a imaginární část.

Příklad 2: Uvažme funkci $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ definovanou ma maximální otevřené množině, na které je holomorfní. Popište inverzní analytickou funkci $\boldsymbol{g}$ k f. Tj., určete aspoň jeden analytický element, který ji generuje. Dále určete její definiční obor a pro každý bod definičního oboru počet různých analytických elementů, jejichž je středem. Navíc popište analytické pokračování jednotlivých elementů podél kružnic o středu 0 v závislosti na poloměru.

Příklad 3: Nechť $n \ge 2$ a $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je omezená oblast. Nechť $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, která je holomorfní na Ω. Ukažte, že $f(\partial\Omega) = f(\overline{\Omega})$.
Návod:

(i) Ukažte, že stačí dokázat, že pokud f nabývá nuly na Ω, pak nabývá nuly i na $\partial\Omega$.
(ii) Předpokládejme, že f nabývá nuly na Ω, ale ne na $f^{-1}(\Omega)$. Ukažte, že $K = f^{-1}(0)$ je neprázdná kompaktní podmnožina Ω.
(iii) Nechť $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$ je zvolen libovolně, dále pevně. Nechť $\mathbf{b}$ je prvek K, který je nejvzdálenější od $\mathbf{a}$. Dokažte, že existuje.
(iv) Nechť $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ je nějaký nenulový prvek, který je kolmý na $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Pro $m \in \mathbf{N}$ a $r > 0$ definujme funkci jedné komplexní proměnné vzorcem $\varphi_{m,r}(z) = f(\mathbf{a} + \frac{1}{m}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + rz\mathbf{u})$. Ukažte, že existuje $r > 0$ a $m_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $m \ge m_0$ je funkce $\varphi_{m,r}(z)$ definována alespoň na $\overline{\mathbb{D}}$ a je holomorfní na $\mathbb{D}$.
(v) Zvolme r a m_0 z bodu (iv). Ukažte, že funkce $\varphi_{m,r}$ nenabývá nuly na $\mathbb{D}$. (Využijte volbu $\mathbf{b}$ a $\mathbf{u}$.)
(vi) Ukažte, že funkce $\varphi_{m,r}$ konvergují (pro $m \to \infty$) na $\mathbb{D}$ stejnoměrně k holomorfní funkci φ_r. Spočtěte tuto funkci a ukažte, že φ_r není konstantní nulová funkce, ale platí $\varphi_m(0) = 0$.
(vii) Odvoďte spor s Rouchéovou (nebo Hurwitzovou) větou.

Orientační hodnocení:
Na vypracování jsou 3 hodiny. Ke složení zkoušky je třeba vyřešit alespoň 50%, na známku velmi dobře alespoň 60%, na známku výborně alespoň 75%. Tyto hodnoty jsou orientační, případné nejasnosti je možné vyjasnit v rámci následného ústního pohovoru.