Věta IX.10 a její důsledky

Nechť f je harmonická fnkce na $U(0,1)$, $|f| \leq M$ na $U(0,1)$

$\boxed{1}$ Nechť $f_r(e^{it}) = f(re^{it})$, $e^{it} \in \mathbb{T}$, $r \in (0,1)$
Pak existuje $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$: $f_r \xrightarrow{w^*} f^*$ v $L^\infty(\mathbb{T})$ (pro $r \to 1-$)
Navíc
(0) $f(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\theta - t) f^*(e^{it})\, dt$ ($\rho \in [0,1)$, $\theta \in \mathbb{R}$)

Důkaz: 1. krok (nalezení f^*)
Připomeňme, že z funkcionální analýzy víme, že $L^\infty(\mathbb{T}) = L^1(\mathbb{T})^*$ a $L^1(\mathbb{T})$ je separabilní. Proto z každé omezené posloupnosti v $L^\infty(\mathbb{T})$ lze vybrat podposloupnost, která je w^* konvergentní.
Speciálně:
(□) $\forall r_n \nearrow 1$ $\exists (s_n)$ vybraná, že (f_{s_n}) je w^*-konvergentní.

(Platí, protože $\|f_r\|_\infty \leq M$ pro každé $r \in (0,1)$)

Zvolme tedy takovou posloupnost (s_n), že $s_n \nearrow 1$ a (f_{s_n}) w^*-konverguje a označme $f^* := w^*\text{-}\lim f_{s_n}$

2. krok: f^* splňuje (0), neboli $f = P[f^*]$

$$f(\rho e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-} f(r\rho e^{i\theta}) \overset{\text{VĚTA 6 + DŮSLEDEK}}{=} \lim_{r\to1-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\theta-t) f(re^{it})\,dt$$
$$= \lim_{r\to1-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\theta-t) f_r(e^{it})\,dt =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\theta-t) f_{s_n}(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\theta-t) f^*(e^{it})\,dt$$

$P_\rho(\theta - \cdot) \in L^1(\mathbb{T})$ dle V2

3. krok: $h^* \in L^\infty(\mathbb{T})$, $P[h^*] = 0 \Rightarrow h^* = 0$ v $L^\infty(\mathbb{T})$

⌈ Zvolme $g \in C(\mathbb{T})$ libovolnou. Pak

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})\, h^*(e^{it})\,dt \overset{V5}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r\to 1-} P[g](re^{it}) \cdot h^*(e^{it})\,dt =$$

LEBESGUEOVA VĚTA

$$= \lim_{r\to 1-} \int_{-\pi}^{\pi} P[g](re^{it})\, h^*(e^{it})\,dt = \lim_{r\to 1-} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s)\, g(e^{is})\right) \cdot h^*(e^{it})\,ds\,dt$$

FUBINI

$$= \lim_{r\to 1-} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s)\, h^*(e^{it})\,dt\right)}_{=P[h^*](re^{is})=0} g(e^{is})\,ds = 0$$

⌈ $$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t-s)\, g(e^{is})\, h^*(e^{it})|\,ds\,dt \le \|g\|_\infty \cdot \|h\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s)\,ds\,dt$$

$$\overset{V2}{=} 4\pi^2 \|g\|_\infty \|h\|_\infty < \infty \quad ⌋$$

Tedy $\forall g \in C(\mathbb{T})$: $\int_{-\pi}^{\pi} g h^* = 0$. $C(\mathbb{T})$ hustá v $L^1(\mathbb{T})$

$\Rightarrow \forall g \in L^1(\mathbb{T})$: $\int_{-\pi}^{\pi} g h^* = 0$. Tedy $h^* = 0$. ⌋

4. krok $\forall r_n \nearrow 1 \ \exists (s_n)$ vybraná: $f_{s_n} \xrightarrow{w^*} f^*$

⌈ Dle (II) víme, že $\forall r_n \ \exists (s_n)$: (f_{s_n}) je w^*-konvergentní – z 2. kroku w^*-limita splňuje (O), tedy z 3. kroku je limita vždy stejná. ⌋

ZÁVĚR: z 4. kroku plyne, že $f_r \xrightarrow{w^*} f^*$ pro $r \to 1-$

NAVÍC f reálná $\Rightarrow f^*$ reálná, $f \ge 0 \Rightarrow f^* \ge 0$.

$\boxed{2}$ Nechť $g \in L^1(\mathbb{T})$. Pak pro s.v. $t \in [0, 2\pi)$ platí
$g(e^{it})$ ~~$g(e^{is})$~~ $= \lim_{r \to 1-} P[g](re^{it})$

Dk: • stačí dokázat pro reálnou g.
Předpokládejme tedy, že g je reálná.

• $G(t) := \int_0^t g(e^{is})\,ds$. Pak víme, že
$G'(t) = g(e^{it})$ pro s.v. $t \in \mathbb{R}$
Ukážeme, že pro tato t platí $g(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1-} P[g](re^{it})$

• zvolme tedy $\theta \in \mathbb{R}$, pro které $G'(\theta) = g(e^{i\theta})$
a označme $A := g(e^{i\theta})$

• Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existuje $\delta \in (0, \frac{\pi}{3})$, že
$$\forall s \in (0, \delta] : \quad \frac{G(\theta + s) - G(\theta - s)}{2s} \in \left(A - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{A + \varepsilon}{2}\right)$$

Pak $P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P_r(\theta - t)\, g(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\theta-\pi}^{\theta-\delta} + \int_{\theta+\delta}^{\theta+\pi}\right)$
$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}$

• $t \in [\theta - \pi, \theta - \delta) \cup (\theta + \delta, \theta + \pi] \implies$

$$|P_r(\theta - t)| \overset{V2}{\leq} P_r(\delta) \quad \text{, tedy}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\theta-\pi}^{\theta-\delta} + \int_{\theta+\delta}^{\theta+\pi}\right)\right| \leq \underbrace{P_r(\delta)}_{} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} |g| \xrightarrow{r \to 1-} 0$$

V2 (iv)

Tedy $\exists r_1 \in (0,1)\ \forall r \in (r_1, 1): \left| \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\theta-\pi}^{\theta-\delta} + \int_{\theta+\delta}^{\theta+\pi} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\bullet\ \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\theta-t) g(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi} P_r(\delta) \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} g(e^{it})\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} (P_r(\theta-t) - P_r(\delta))\, g(e^{it})\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} P_r(\delta) \cdot \left(G(\theta+\delta) - G(\theta-\delta) \right) - \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \int_{|\theta-t|}^{\delta} P_r'(s)\,ds\, g(e^{it})\,dt$$

[P_r sudá, $t \in (\theta-\delta, \theta+\delta)$]

FUBINI

$$= \frac{1}{2\pi} P_r(\delta)\left(G(\theta+\delta) - G(\theta-\delta)\right) - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\int_{\theta-s}^{\theta+s} P_r'(s)\, g(e^{it})\,dt\,ds}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} P_r'(s)\left(G(\theta+s) - G(\theta-s)\right) ds$$

[$P_r' \le 0$, tedy patří do C^1
$g \in C^1$]

$|\theta - t| \le s \le \delta$

$\Leftrightarrow \theta-\delta \le t \le \theta+\delta$

$\Updownarrow$

$0 \le s \le \delta$

$t \in (\theta-s, \theta+s)$

Protože $P_r > 0$ a $P_r' \le 0$, dostáváme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} P_r(\theta-t) g(e^{it})\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} P_r(\delta) \cdot 2\delta \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} P_r'(s) \cdot 2s \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\delta P_r(\delta) - \int_0^{\delta} s P_r'(s)\,ds\right) = \frac{1}{\pi}\left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right) \underbrace{\int_0^{\delta} P_r(s)\,ds}_{\le \pi \text{ dle } V_2}$$

$$\le A + \frac{\varepsilon}{2}$$

Analogicky $\frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\sigma}^{\theta+\sigma} P_r(\theta - t)\, g(e^{it})\, dt \geq A - \frac{\varepsilon}{2}$

Máme tedy $\forall r \in (r_1, 1)$:

$P[g](re^{i\theta}) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

Tím je důkaz hotov.

Důsledek (Fatouova věta): f omezená holomorfní na $U(0,1)$ $\Rightarrow$ pro s.v. $t \in [0, 2\pi)$ existuje limita $f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1-} f(re^{it})$

Pak $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$, $\|f^*\|_\infty = \|f\|_\infty$ a $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{it})}{e^{it} - z} e^{it}\, dt$

Dk: f holomorfní $\Rightarrow$ f harmonická. Označme $f_r(e^{it}) = f(re^{it})$; $e^{it} \in \mathbb{T}$, $r \in (0,1)$.

Dle předchozí věty $\boxed{1}$ existuje $f^* = w^*\text{-}\lim_{r\to 1-} f_r$ a $P[f^*] = f$. Odtud $\|f^*\|_\infty = \|f\|_\infty$.
Dle $\boxed{2}$ je $f^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1-} f(re^{it})$ pro s.v. t

Navíc pro $z \in U(0,1)$ a $r \in (|z|, 1)$ plyne z Cauchyova vzorce

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z} re^{it}\, dt \xrightarrow{r \to 1-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{it})}{e^{it} - z} e^{it}$$

Lebesgueova věta pro $r \in (|z|+\varepsilon, 1)$ pro malé $\varepsilon > 0$.

Důsledek: f omezená holomorfní na $U(0,1)$, f^* jako ve Fatouově větě. Pokud $f^* = 0$ s.v. na nějakém oblouku, pak $f = 0$ na $U(0,1)$

DK: BÚNO existuje $n \in \mathbb{N}$, že $f^*(e^{it}) = 0$ pro s.v. $t \in [0, \frac{2\pi}{n}]$

Uvažme fci $g(z) := \prod_{k=0}^{n-1} f(e^{i\frac{2k\pi}{n}} z)$, $z \in U(0,1)$

$\Rightarrow$ g holomorfní omezená na $U(0,1)$, navíc $g^* = 0$ s.v.
Odtud $g = 0$ na $U(0,1)$.

Ale pokud f není konstantní 0, pak f má jen spočetně mnoho kořenů, tedy i g má jen spočetně mnoho kořenů, spor - g není konstantní 0.