Věta IX.19

Nechť $f \in H(\mathbb{D})$ splňuje $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D})$.
Pak platí: $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$

Pokud navíc $f \in H^2$, pak:

(1) $f^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1-} f(re^{it})$ existuje pro s.v. $t \in [-\pi, \pi)$

(2) $f^* \in L^2(\mathbb{T})$

(3) Pro $n \in \mathbb{Z}$ nechť $\varphi_n(e^{it}) = e^{int}$, $e^{it} \in \mathbb{T}$
Pak $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ je ON báze $L^2(\mathbb{T})$ a $f^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$

(4) $\lim_{r \to 1-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{it}) - f(re^{it})|^2 \, dt = 0$

(5) $f = P[f^*]$

(6) $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^*(w)}{w - z} \, dw$, kde γ je kladně orientovaná jednotková kružnice
(pro $z \in \mathbb{D}$)

Dk:

1. krok (důkaz úvodní rovnosti)

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$M_2(f,r)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-int} \right) dt$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m \overline{a_n} r^{m+n} e^{i(m-n)t} \, dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\infty} a_m \overline{a_n} r^{m+n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} \, dt}_{\substack{=0 \; m \neq n \\ =2\pi \; m=n}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$

Nyní $M_2(f,r)^2 \nearrow \|f\|_2^2$ pro $r \to 1-$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \nearrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ pro $r \to 1-$
(Leviho věta)

2. krok (f^* zvolíme, ať platilo (2), (3))

$f \in H^2 \Rightarrow \|f\|_2 < \infty \overset{\text{krok 1}}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

Protože systém z (3) je ON báze (známo z teorie Fourierových řad) můžeme definovat

$$f^* := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n \quad (v\ L^2(\mathbb{T}))$$

Pak zřejmě platí (2), (3) a navíc $\|f^*\|_2 = \|f\|_2$
(z kroku 1 a Parsevalovy rovnosti.)

3. krok (důkaz (4))

Pro $r \in (0,1)$ položme $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$, $\theta \in [-\pi, \pi)$
Víme, že $f_r \in L^2(\mathbb{T})$. Navíc

$$f_r(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \quad (\text{absolutně a stejnoměrně na } \mathbb{T})$$

Proto je zároveň $f_r = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \varphi_n$ v $L^2(\mathbb{T})$

Tedy $f^* - f_r = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-r^n) \varphi_n$

Parseval $\Rightarrow \|f^* - f_r\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1-r^n)^2 \xrightarrow{r \to 1-} 0$

například z Lebesgueovy věty
$n \mapsto |a_n|^2$ je integrovatelná majoranta.

Tím je dokázán bod (4)

4. krok (důkaz bodu (5))

Pro $s \in (0,1)$ je fce $z \mapsto f(sz)$ holomorfní na $U(0,\frac{1}{s})$, speciálně je harmonická, a tedy

$$f(sz) = P[f_s](z), \; z \in U(0,1) \quad (f_s \text{ jako v 3. kroku})$$

Nechť $z = re^{i\theta}$ $(r<1)$. Pak

$$|f(sz) - P[f^*](z)| = |P[f_s](z) - P[f^*](z)| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\left(f_s(e^{it}) - f^*(e^{it})\right) dt \right| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)^2\, dt\right)^{1/2}}_{\substack{\| \\ \|P_r\|_2 < \infty \\ (P_r \text{ spojitá na } [-\pi,\pi])}} \cdot \underbrace{\|f_s - f^*\|_2}_{\xrightarrow[\text{pro } s\to 1-]{} 0} \quad \text{dle (4) (3. krok)}$$

$$\Rightarrow P[f^*](z) = \lim_{s\to 1-} f(sz) = f(z)$$

5. krok z (5) (4. krok), toho, že $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ a Věty 10(2) plyne (1).

6. krok (důkaz bodu (6))

Při značení z 4. kroku: $f(sz) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_s(w)}{w-z}\, dw$ (Cauchyova věta)

$$\left|f(sz) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f^*(w)}{w-z}\, dw\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f_s(w) - f^*(w)}{w-z}\, dw\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_s(e^{it}) - f^*(e^{it})}{e^{it} - z}\, i e^{it}\, dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f_s(e^{it}) - f^*(e^{it})|}{1-|z|}\, dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \|\ \|_1 \leq \|\ \|_2 \text{ z Hölderovy nerovnosti}}}{\leq} \frac{1}{1-|z|} \cdot \|f_s - f^*\|_2 \xrightarrow[\text{dle (4)}]{s\to 1-} 0.$$

Tedaj $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^*(w)}{w-z}\,dw = \lim_{s\to 1-} f(sz) = f(z)$.

Tim je dokaz prevedn.

<u>Dosledek</u> H^2 je Hilbertov prostor, $f \mapsto f^*$ je izometrija H^2 na zaprt podprostor $L^2(\mathbb{T})$ generiran s funkcijami φ_n, $n \geq 0$.

<u>Dk:</u> • Z V19 vemo, da $f \mapsto f^*$ je izometrija do tega podprostora.

• Pokl $f(z) = z^n$, pa $f \in H^2$, $f^* = \varphi_n$

• H^2 je popoln z V18, tedaj obraz pri tej izometriji je zaprt podprostor $L^2(\mathbb{T})$.