Věta XI.4 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ logaritmicky konvexní úplná Reinhardtova oblast. Pak existuje mocninná řada, jejíž oblast konvergence je $\Omega$

Důkaz: $\boxed{1}$ Nechť $\Omega$ je omezená

pro $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ položme $N_\alpha(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} |x^\alpha|$

($N_\alpha(\Omega) < \infty$ díky omezenosti $\Omega$)

Uvažme řadu $S: \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{x^\alpha}{N_\alpha(\Omega)}$

Tvrdím, že $\mathcal{D}_S = \Omega$

(a) zřejmě $\Omega \subset \mathcal{B}_S$ $\left( \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \left| \frac{x^\alpha}{N_\alpha(\Omega)} \right| \le 1 \text{ pro každé } x \in \Omega \right)$

$\Omega$ otevřená $\Rightarrow$ $\Omega \subset \operatorname{int} \mathcal{B}_S = \mathcal{D}_S$

(b) $x \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}$, $x$ má nenulové souřadnice
$\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n : |x^\alpha| > N_\alpha(\Omega)$

[ $\log \Omega = \{ (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|) ;\ z \in \Omega \cap (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \}$
podle předpokladu konvexní v $\mathbb{R}^n$

Dále, $(\log|x_1|, \dots, \log|x_n|) \notin \overline{\log \Omega}$

[F $(\log|x_1|, \dots, \log|x_n|) \in \overline{\log \Omega} \Rightarrow$

$(\log|x_1|, \dots, \log|x_n|) = \lim_{k \to \infty} (\log|y_1^k|, \dots, \log|y_n^k|)$

pro nějaké $y^k \in \Omega$

$z^k := (z_1^k, \dots, z_n^k) := \left( \frac{|y_1^k| \cdot x_1^k}{|x_k^1|}, \dots, \frac{|y_n^k| \cdot x_n^k}{|x_k^n|} \right)$

$\Rightarrow z^k \in \Omega$ (protože $y \in \Omega$ a $\Omega$ je Reinhardtova)

a $z^k \to x$ (protože $|y_j^k| \xrightarrow{k} |x_j^k|$)

tedy $x \in \overline{\Omega}$, spor $\lightning$

Hahn-Banachova věta $\Rightarrow \exists\, \gamma \in \mathbb{R}^n$:

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \cdot \lg|x_j| > \sup \gamma(\lg \Omega) = \sup_{\substack{z \in \Omega \\ \cap (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n}} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \cdot \lg|z_j|$$

Platí: $\gamma_j \geq 0$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$

$\Gamma$ $\gamma_j < 0$ ... zvolme $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega \cap (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n$

Pak $\forall\, t \in (0,1)$:

$z^{(t)} := (z_1, \dots, z_{j-1}, t z_j, z_{j+1}, \dots, z_n) \in \Omega$

a $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \lg |z_j^{(t)}| \xrightarrow{t \to 0+} +\infty$

Tedy pravá strana nerovnosti $(*)$ by byla $+\infty$, spor $\lightning$

Dále: $\Omega$ omezená $\Rightarrow \lg \Omega \cup \{(-\lg|x_1|, \dots, -\lg|x_n|)\} \subset (-\infty, C)^n$ pro

nějaké $C \in \mathbb{R}$ (BÚNO $C > 0$)

zvolme $0 < \varepsilon < \dfrac{\text{Levá strana } (*) - \text{pravá strana } (*)}{4n(C+1)}$

a zvolme $\beta_j \in [\gamma_j, \gamma_j + \varepsilon)$ racionální

Pak $\sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \lg|t_j| \geq \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \cdot \lg|t_j| + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\beta_j - \gamma_j)}_{\in [0,\varepsilon)} \underbrace{\lg|t_j|}_{> -C}$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \cdot \lg|t_j| - n \cdot \varepsilon \cdot C$$

Pro $y \in \Omega \cap (\mathbb{A}\setminus\{0\})^n$ je

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \lg|y_j| = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \cdot \lg|y_j| + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\beta_j - \gamma_j)}_{\in [0,\varepsilon)} \underbrace{\lg|y_j|}_{< C}$$

$$< \sup \gamma(\lg \Omega) - n\varepsilon C$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lg|t_j| - \sup \beta(\lg \Omega) \geq$$

$$\geq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \cdot \lg|t_j| - \sup \gamma(\lg \Omega)}_{> 4n\varepsilon(C+1)} - 2n\varepsilon C > 0$$

Tedy: BÚNO $\gamma_j \in \mathbb{Q}$ pro $j = 1, \ldots, n$

Tedy BÚNO $\gamma_j \in \mathbb{N}_0$ pro $j = 1 \ldots n$

Pak ověření:

$$\sum \gamma_1 \lg|t_j| > \sup \gamma \cdot \lg(\Omega)$$

$$\underset{\lg|x^{\gamma}|}{\parallel} \qquad \underset{\sup_{z \in \Omega \cap (\mathbb{A}\setminus\{0\})^n} \lg|z^{\gamma}|}{\parallel}$$

Tedy $|t^{\gamma}| > N_{\gamma}(\Omega)$ $\lrcorner$

c) Závěr: Máme jedno $\beta$, pro které $|x^\beta| > N_\beta(\Omega)$ (evidentně $\beta \neq (0,\dots,0)$)

Toovšem platí i pro každý násobek $\beta$, máme tedy

nekonečně mnoho $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, pro které $\left|\frac{x^\beta}{N_\beta(\Omega)}\right| > 1$

Tedy $x \notin \mathcal{C}_S$

Dokážeme nyní, že $\mathcal{D}_S \subset \Omega$. Dle V2 stačí ukázat $\mathcal{D}_S \subset \overline{\Omega}$.
Pokud však $\mathcal{D}_S \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset$, je to neprázdná otevřená množina, obsahuje tedy bod $x$ s nenulovými souřadnicemi.
Dle předchozího $x \notin \mathcal{C}_S$, což je spor.

$\boxed{2}$ $\Omega$ neomezená. Pokud $\Omega = \mathbb{C}^n$, je to triviální, lze vzít nulovou řadu. Nechť $\Omega \subsetneq \mathbb{C}^n$.
Dle V2 je $\overline{\Omega} \subsetneq \mathbb{C}^n$, vezmeme $(z_j)$ posloupnost v $(0,+\infty)^n \setminus \overline{\Omega}$, která je hustá a každý člen se opakuje nekonečně krát.

$\Omega_m := \Omega \cap U(0,m)^n$, $m \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\Omega_m$ omezená (a také splňa Reinhardtovu logaritmicky konvexní)

Dle $\boxed{1}$(b): $\forall j\ \exists \alpha_j \in \mathbb{N}_0^n : |z_j^{\alpha_j}| > N_{\alpha_j}(\Omega_j)$

BÚNO $(\alpha_j)$ je prostá posloupnost ... (lze uvažovat násobky)

Vezmeme řadu $S: \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{\alpha_j}}{N_{\alpha_j}(\Omega_j)}$

Pak $\Omega \subset \mathcal{B}_S$ [$z \in \Omega \Rightarrow \exists j\ z \in \Omega_j$ $\Rightarrow$ pro $k \geq j$ je pak $\left|\frac{z^{\alpha_k}}{N_{\alpha_k}(\Omega_k)}\right| \leq 1$]

Dále: $\frac{z_j^{\alpha_j}}{N_{\alpha_j}(\Omega)} > 1$, $\alpha_j$ se vyskytuje nekonečně krát $\Rightarrow z_j \notin \mathcal{C}_S \Rightarrow z_j \notin \mathcal{D}_S$

$\Rightarrow ((0,\infty)^n \setminus \overline{\Omega}) \cap \mathcal{D}(S) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{D}_S \subset \overline{\Omega} \underset{V2}{\Rightarrow} \mathcal{D}_S \subset \Omega$