Věta XI.13

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je oblast, $K \subset \Omega$ kompaktní, $\Omega \setminus K$ souvislá. Pak každou holomorfní funkci na $\Omega \setminus K$ lze rozšířit na holomorfní funkci na Ω.

Důkaz: $\boxed{1}$ Značení: $z \in \mathbb{C}^n$ .... $z = (z', z_n)$, kde $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$, $z_n \in \mathbb{C}$

$\boxed{2}$ Příprava: Pro $a \in \Omega$ zvolme Q_a, polykruh o středu a' a D_a, kruh se středem a_n, aby:

- $\overline{Q_a \times D_a} \subset \Omega$
- pokud $a \in \Omega \setminus K$, pak $\overline{Q_a \times D_a} \subset \Omega \setminus K$

Dále položme $L_a := \left((\overline{Q_a} \times \mathbb{C}) \cap K \right) \cup (\overline{Q_a} \times \overline{D_a})$

Pak $L_a \subset \Omega$, L_a je kompaktní

Aplikujme Lemma 12 na Ω, L_a, a'; dostaneme cykl Γ_a v $\mathbb{C}$ a polykruh $P_a \subset Q_a$ o středu a', že platí:

$$\forall x' \in P_a \ \forall x_n \in \mathbb{C} : (x', x_n) \in L_a \Rightarrow \operatorname{ind}_{\Gamma_a} x_n = 1$$

$$(x', x_n) \notin \Omega \Rightarrow \operatorname{ind}_{\Gamma_a} x_n = 0$$

$\boxed{3}$ Nechť f je holomorfní na $\Omega \setminus K$.

Pro $a \in \Omega$ a $z = (z', z_n) \in P_a \times D_a$ definujme

$$f^a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} \frac{f(z', \xi)}{\xi - z_n} \, d\xi$$

Pak • f^a je dobře definovaná

$\ulcorner$ ~~...~~

$\ulcorner (z', z_n) \in P_a \times D_a$

$\Rightarrow$ pro $\xi \in \langle \Gamma_a \rangle$ je $(z', \xi) \in \Omega \setminus L_a$,

tedy i $(z', \xi) \in \Omega \setminus K$

$\Rightarrow f(z', \xi)$ definováno

navíc $(z', z_n) \in L_a$

$\Rightarrow z_n \neq \xi$

tedy integrál je definován $\lrcorner$

• f^a holomorfní na $P_a \times D_a$

$\ulcorner$ jako v důkazu V11

– spojitá a odděleně holomorfní $\lrcorner$

$\boxed{4}$ $a, b \in \Omega \Rightarrow f^a = f^b$ na $(P_a \times D_a) \cap (P_b \times D_b)$

$\ulcorner$ $z = (z', z_n) \in (P_a \times D_a) \cap (P_b \times D_b)$

$H := \Omega_{z'} \setminus (K_{z'} \cup (\overline{D_a \cap D_b}))$

$(\Omega_{z'} = \{x \in \mathbb{C};\ (z', x) \in \Omega\}$, podobně $K_{z'})$

Pak $H \subset \mathbb{C}$ je otevřená

$u \in \mathbb{C} \setminus H \Rightarrow$ buď $u \notin \Omega_{z'} \Rightarrow (z', u) \notin \Omega$, přitom $z' \in P_a \cap P_b$, tedy $\operatorname{ind}_{\Gamma_a} u = \operatorname{ind}_{\Gamma_b} u = 0$

nebo $u \in K_{z'} \Rightarrow (z', u) \in K$, $z' \in Q_a \cap Q_b$

$\Rightarrow (z', u) \in L_a \cap L_b$

tedy $\operatorname{ind}_{\Gamma_a} u = \operatorname{ind}_{\Gamma_b} u = 1$

nebo $u \in \overline{D_a \cap D_b} \Rightarrow (z', u) \in L_a \cap L_b$

opět $\operatorname{ind}_{\Gamma_a} u = \operatorname{ind}_{\Gamma_b} u = 1$

Tedy: $\forall u \in \mathbb{C} \setminus H$: $\mathrm{ind}_{\Gamma_a} u = \mathrm{ind}_{\Gamma_b} u$

$z_n \in D_a \cap D_b \Rightarrow z_n \in \mathbb{C} \setminus H$. Tedy funkce

$$\xi \mapsto \frac{f(z', \xi)}{\xi - z_n} \text{ je holomorfní na } H$$

Přitom $\langle \Gamma_a \rangle, \langle \Gamma_b \rangle \subset H$, indexy mimo H stejné

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_a} \frac{f(z', \xi)}{\xi - z_n} d\xi = \int_{\Gamma_b} \frac{f(z', \xi)}{\xi - z_n} d\xi$$ dle Globální Cauchyovy věty

Tedy $f^a(z) = f^b(z)$. ┘

$\boxed{5}$ $g(z) := f^a(z)$ pro $z \in P_a \times D_a$. Díky $\boxed{3}$ a $\boxed{4}$ je g holomorfní na Ω.

$\boxed{6}$ $g = f$ na $\Omega \setminus K$:

$$p: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1} \qquad p(z', z_n) = z'$$

Pak $p(\Omega)$ je otevřená v $\mathbb{C}^{n-1}$
$p(K) \subset p(\Omega)$ kompaktní

zvolme $a' \in p(\Omega) \setminus p(K)$, $a_n \in \mathbb{C}$, aby

$(a', a_n) \in \Omega$ (pak to patří do $\Omega \setminus K$)

Zvolme polydisk $P(a', r) \times U(a_n, \varepsilon)$, že $\overline{P(a', r)} \subset p(\Omega) \setminus p(K)$
a ať polydisk s uzávěrem obsažen v Ω (tedy v $\Omega \setminus K$)
Pak na tomto polydisku je $f^a = f$ dle Cauchyova vzorce.