K oddílu V.9 – Kvazikonkávní funkce

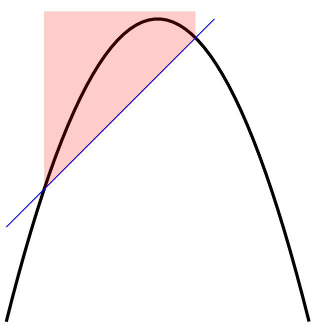
K definici kvazikonkávních funkcí:

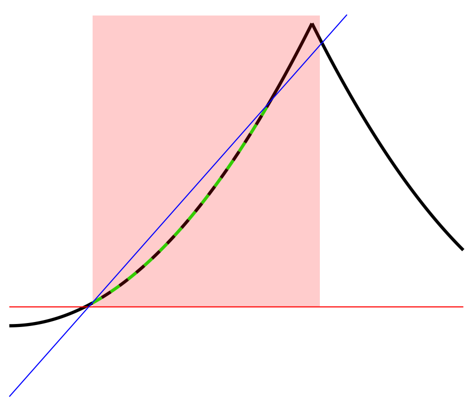
- Stejně jako konkávní funkce, i kvazikonkávní funkce se definují na konvexní množině. Důvod k tomu je stejný.

- Porovnání konkávních a kvazikonkávních funkcí na intervalu: Mějme funkci f definovanou na intervalu I.

  - f je konkávní na I, pokud pro každou dvojici bodů $a < b$ v I část grafu f na intervalu $\langle a, b \rangle$ leží nad příslušnou sečnou ke grafu (tj. nad přímkou spojující body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$;
  - f je kvazikonkávní na I, pokud pro každou dvojici bodů $a < b$ v I část grafu f na intervalu $\langle a, b \rangle$ leží nad menší z hodnot $f(a), f(b)$.

  Tento rozdíl je ilustrován na následujících na následujících obrázcích.

  Na levém obrázku je graf konkávní funkce. Pro zvolenou dvojici bodů část grafu mezi nimi leží nad sečnou.

  Na pravém obrázku je kvazikonkávní funkce, co není konkávní. Pro zvolenou dvojici bodů je část grafu mezi nimi pod sečnou, ale nad menší z funkčních hodnot v krajních bodech.

- Kvazikonkávní funkce jedné proměnné:

  - Je-li funkce f na intervalu monotónní (tj. neklesající nebo nerostoucí), pak je kvazikonkávní.

Důvod je ten, že pokud f je monotónní na intervalu I a $a, b \in I$, pak v bodech mezi a, b nabývá f hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$, tedy určitě nad menší z těchto hodnot.

– Kvazikonkávní funkce na otevřeném intervalu nemusí být spojitá (protože monotónní funkce nemusí být spojitá). To je další rozdíl oproti konkávním funkcím.

– Funkce f je kvazikonkávní na intervalu I, právě když platí jedna z následujících tří možností:

  * f je neklesající na I;
  * f je nerostoucí na I;
  * existuje $c \in I$, že f je neklesající na $I \cap (-\infty, c\rangle$ (tj. na levé části I) a f je nerostoucí na $I \cap (c, +\infty)$ (tj. na pravé části I);
  * existuje $c \in I$, že f je neklesající na $I \cap (-\infty, c)$ (tj. na levé části I) a f je nerostoucí na $I \cap \langle c, +\infty)$ (tj. na pravé části I).

  Návod k důkazu (pro zájemce): Jedna implikace je snadná – pokud je splněna jedna z podmínek, je f kvazikonkávní.

  Obrácená implikace: Předpokládejme, že f je kvazikonkávní na I. Ukažte následující pomocná tvrzení:

  * *Nechť $a < b$ a $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $x \in (-\infty, a) \cap I$ platí $f(x) \leq f(a)$. (Použijte definici.)*
  * *Nechť $a < b$ a $f(a) < f(b)$. Pak f je neklesající na $(-\infty, a\rangle \cap I$. (Použijte předchozí krok.)*
  * *Analogicky dokažte, že pokud $a < b$ a $f(a) < f(b)$, pak f je nerostoucí na $\langle b, +\infty) \cap I$.*
  * *Předpokládejme, že f není nerostoucí. To znamená, že existují $a, b \in I$ splňující $a < b$ a $f(a) < f(b)$. Pak podle předchozích kroků je f neklesající na $I \cap (-\infty, a\rangle$. Definujme množinu*

    $$M = \{x \in \mathbb{R}; I \cap (-\infty, x\rangle \neq \emptyset \,\&\, f \textit{ je neklesající na } I \cap (-\infty, x\rangle\}$$

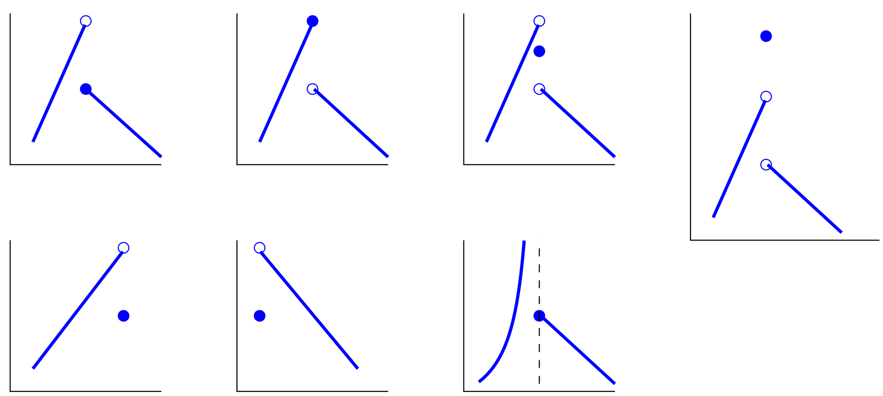
    Tato množina je neprázdná ($a \in M$). Pokud není shora omezená, pak f je neklesající na I.
    Předpokládejme, že M je shora omezená. Označme $c = \sup M$. Pak $c \in I$ (jinak by i všechna větší čísla patřila do M) a f je neklesající na $I \cap (-\infty, c)$. Pokud c je koncový bod I, pak určitě platí čtvrtá možnost.

Předpokládejme, že c není koncový bod I. Uvědomme si, že f musí být nerostoucí na $I \cap (c, +\infty)$. Nechť totiž $x, y \in I \cap (c, +\infty)$ splňují $x < y$. Kdyby platilo $f(x) < f(y)$, pak dle předchozích kroků je f neklesající na $(-\infty, x\rangle \cap I$, tedy $x \in M$. To je ale spor s tím, že $c = \sup M$. Proto musí být $f(x) \geq f(y)$.
Máme tedy, že f je neklesající na $I \cap (-\infty, c)$ a nerostoucí na $I \cap (c, +\infty)$. Zbývá si uvědomit, že

$$f(c) \geq \min\{\lim_{x \to c-} f(x), \lim_{x \to c+} f(x)\},$$

takže nastává třetí nebo čtvrtá možnost

Grafy kvazikonkávních funkcí ilustrující některé z uvedených možností:



- Ryze Kvazikonkávní funkce jedné proměnné se chovají analogicky:
  - Je-li funkce f na intervalu ryze monotónní (tj. klesající nebo rostoucí), pak je kvazikonkávní.
  - Funkce f je ryze kvazikonkávní na intervalu I, právě když platí jedna z následujících čtyř možností:
    * f je klesající na I;
    * f je rostoucí na I;
    * existuje $c \in I$, že f je rostoucí na $I \cap (-\infty, c\rangle$ (tj. na levé části I) a f je klesající na $I \cap (c, +\infty)$ (tj. na pravé části I);
    * existuje $c \in I$, že f je rostoucí na $I \cap (-\infty, c)$ (tj. na levé části I) a f je klesající na $I \cap \langle c, +\infty)$ (tj. na pravé části I).

- f je kvazikonkávní na M, právě když je kvazikonkávní na každé úsečce obsažené v M. (Důkaz stejný jako pro konkávní funkce.)

- f je kvazikonkávní na úsečce ab, právě když funkce $\varphi(t) = f(ta + (1-t)b)$ je kvazikonkávní na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. (Důkaz stejný jako pro konkávní funkce.)

K Větě V.25: Toto je velmi snadné. Pokud f je ryze kvazikonkávní na M a nabývá ve dvou bodech $a, b \in M$ stejné hodnoty, pak na úsečce ab (s výjimkou krajních bodů) nabývá hodnot ostře větších. Proto nemůže nabývat maxima ve dvou různých bodech.

K Důsledku Věty V.25: Tento důsledek plyne z kombinace Věty V.10 (ta dá existenci maxima) a Věty V.25 (ta dá jednoznačnost).

K Větě V.26:

- Důkaz:

  $\Rightarrow$: Předpokládejme, že f je kvazikonkávní a $\alpha \in \mathbb{R}$. Nechť $a, b \in Q_\alpha$. Pak $f(a) \geq \alpha$ a $f(b) \geq \alpha$. Proto i $\min\{f(a), f(b)\} \geq \alpha$.
  Protože f je kvazikonkávní, pro každé x z úsečky ab platí

  $$f(x) \geq \min\{f(a), f(b)\} \geq \alpha,$$

  tedy $x \in Q_\alpha$. Proto celá úsečka ab patří do Q_α. To dokazuje konvexitu Q_α.

  $\Leftarrow$: Předpokládejme, že každá z množin Q_α je konvexní. Ukažme, že f je kvazikonkávní. Zvolme $a, b \in M$. Položme

  $$\alpha = \min\{f(a), f(b)\}.$$

  Pak $a, b \in Q_\alpha$, proto celá úsečka ab patří do Q_α. Tedy pro každé x z úsečky ab platí

  $$f(x) \geq \alpha = \min\{f(a), f(b)\}.$$

  To ovšem dokazuje kvazikonkávnost f.

- Význam této věty:
  - Tato věta je vlastně motivací pro definici kvazikonkávních funkcí. Tedy ta definice je vymyšlena takovým způsobem, aby platila tato charakterizace. (A aby zároveň připomínala definici konkávních funkcí.)
  - Tato věta mj. říká, že kvazikonkávnost se pozná z „kvalitativního chování vrstevnic“. Tedy z tvaru vrstevnic a jejich uspořádání (tj. kde je hodnota větší a kde menší), přitom nezávisí na konkrétních hodnotách (tj. na sklonu funkce, na „hustotě vrstevnic“.).

    Zajímavost pro ekonomy je dána právě tímto - u užitkové funkce nemusí být zřejmé její kvantitativní vyjádření, ale může být jasné uspořádaní – kdy je větší a kdy menší. Vrstevnice pak odpovídají indiferenčním křivkám – může záležet na jejich tvaru a uspořádání, ne na jejich hustotě.