Další příklady na Lagrangeovy multiplikátory

Příklad 10b) $f(x,y,z) = x^2+3y^2+z^2$, $M = \{[x,y,z]; x^2+y^2 = z^2, xy \geq 1\}$.

Krok 1, obecné úvahy: f je spojitá na $\mathbb{R}^3$, dokonce je třídy C^∞. Množina M je uzavřená, ale není omezená (obsahuje například body $[1, n, \sqrt{1+n^2}]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jejichž vzdálenost od počátku jde do nekonečna). Tedy předem nevíme nic o nabývání extrémů.

Je snadno vidět, že f není shora omezená na M. Například, dosadíme-li body z předchozího odstavce, dostaneme

$$f(1, n, \sqrt{1+n^2}) = 2 + 4n^2 \to +\infty.$$

Tedy supremum neexistuje.

Na druhou stranu f je zřejmě zdola omezená, a to nulou, protože je nezáporná. Infimum tedy existuje. Navíc lze snadno dokázat, že minimum se nabývá. Důvod je následující:

Například bod $[1, 1, \sqrt{2}]$ patří do M a $f(1, 1, \sqrt{2}) = 1+3+2 = 6$. Množina

$$M' = \{[x,y,z] \in M; f(x,y,z) \leq 6\}$$

je uzavřená (protože M je uzavřená a f spojitá), omezená (pokud $x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 6$, pak i $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$, tedy $\rho([x,y,z],[0,0,0]) \leq \sqrt{6}$ a neprázdná (protože obsahuje bod $[1, 1, \sqrt{2}]$). Je tedy neprázdná a kompaktní, a tedy f nabývá minima na M'. Nechť tedy $a \in M'$ je nějaký bod, v němž se minima nabývá. Pak $f(a) \leq 6$ (protože $a \in M'$) a pro $u \in M \setminus M'$ je $f(u) > 6$. Proto f nabývá v bodě a minima také na M.

Poznámka: Tato úvaha je speciálním případem obecného principu. Nebudeme ho nějak abstraktně formulovat, ale doporučuji si tyto argumenty podrobně rozmyslet.

Mimochodem, f samozřejmě na M' nabývá i maxima. Ale to je k ničemu, protože na $M \setminus M'$ je hodnota větší. Navíc to maximum na M' je triviálně 6.

Krok 2, rozdělení množiny: Máme $M = M_1 \cup M_2$, kde

$$M_1 = \{[x,y,z]; x^2+y^2 = z^2, xy > 1\} \text{ a } M_2 = \{[x,y,z]; x^2+y^2 = z^2, xy = 1\}.$$

Rozmyslíme si, že minima se nabývá na M_2. Mějme totiž bod $[x,y,z] \in M_1$. Pak $xy > 1$.Bod $[x, \frac{1}{x}, \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}] \in M_2$ splňuje

$$f(x, \frac{1}{x}, \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}) = x^2+\frac{3}{x^2}+x^2+\frac{1}{x^2} < x^2+3y^2+x^2+y^2 = x^2+3y^2+z^2 = f(x,y,z).$$

Tedy pro každý bod množiny M_1 jsme nalezli bod množiny M_2, v němž je hodnota menší. Proto minimum na M se nabývá na M_2.

Krok 3, podezřelé body na M_2. Použijeme Větu V.19. Máme $G = \mathbb{R}^3$, $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $g_2(x, y, z) = xy - 1$. Funkce f, g_1, g_2 jsou třídy C^1. n Příslušné gradienty jsou:

$$\begin{aligned} \nabla f &= [2x, 6y, 2z], \\ \nabla g_1 &= [2x, 2y, -2z], \\ \nabla g_2 &= [y, x, 0] \end{aligned}$$

Pokud je v bodě $[x, y, z]$ lokální extrém vzhledem k M_2, podle Věty V.19 jsou následující možnosti:

- Existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které $\nabla g_1 = \alpha \nabla g_2$. Porovnáním třetích souřadnic dostaneme $z = 0$. Takový bod v množině M_2 ovšem není (z první rovnosti dostaneme $x = y = 0$, druhá rovnost pak platit nemůže).

- Existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které $\nabla g_2 = \alpha \nabla g_1$. Porovnáním třetích souřadnic dostaneme, že $z = 0$ nebo $\alpha = 0$. První možnost nastat nemůže dle předchozího bodu; druhá možnost by znamenala $x = y = 0$, což žádný bod M_2 nesplňuje.

- Existují $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ splňující soustavu

$$\begin{aligned} 2x + \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 y &= 0, \\ 6y + \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 x &= 0, \\ 2z - \lambda_1 \cdot 2z &= 0 \end{aligned}$$

  Ze třetí rovnice plyne, že $z = 0$ nebo $\lambda_1 = 1$. První možnost na M_2 nenastává (to jsme již zdůvodnili výše), tedy nutně $\lambda_1 = 1$. Pak soustava má tvar

$$\begin{aligned} 4x + \lambda_2 y &= 0, \\ 8y + \lambda_2 x &= 0 \end{aligned}$$

  Odečteme y-násobek druhé rovnice od x-násobku první rovnice, dostaneme

$$4x^2 - 8y^2 = 0,$$

neboli $x^2 = 2y^2$. Protože $xy = 1$, mají x, y stejné znaménko, tedy $x = y\sqrt{2}$. Protože $xy = 1$, dostáváme $y^2\sqrt{2} = 1$, tedy $y = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Dopočítáme čtyři podezřelé body

$$\left[\sqrt[4]{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right], \left[-\sqrt[4]{2}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right].$$

Ve všech čtyřech je stejná hodnota f, a to

$$\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Krok 4, závěr: Supremum neexistuje, protože f není shora omezená. Minimum je $4\sqrt{2}$ a nabývá se ve čtyřech výše nalezených bodech.

Příklad 10d) $f(x, y, z) = xy+z$, $M = \{[x, y, z]; x^2+y^2 = 2, xyz \geq 1, z \geq 0\}$.

Krok 1, obecné úvahy: f je spojitá na $\mathbb{R}^3$, dokonce je třídy C^∞. Množina M je uzavřená, ale není omezená (obsahuje například body $[1, 1, n]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jejichž vzdálenost od počátku jde do nekonečna). Tedy předem nevíme nic o nabývání extrémů.

Je snadno vidět, že f není shora omezená na M. Například, dosadíme-li body z předchozího odstavce, dostaneme

$$f(1, 1, n) = 1 + n \to +\infty.$$

Tedy supremum neexistuje.

Na druhou stranu f je zdola omezená, a to například číslem -2, protože $x, y \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$ a $z \geq 0$. Proto infimum existuje. Zda se ho nabývá, není zatím zřejmé. Zkusíme tedy najít podezřelé body a pak se zamyslíme, zda v nějakém z nich je opravdu minimum.

Krok 2, rozdělení množiny: V bodech množiny M platí $xyz \geq 1$, tedy $z \neq 0$. Proto máme

$$M = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 = 2, xyz \geq 1, z > 0\}.$$

Dále máme $M = M_1 \cup M_2$, kde

$$M_1 = \{[x, y, z]; x^2+y^2 = 2, xyz > 1, z > 0\} \text{ a } M_2 = \{[x, y, z]; x^2+y^2 = 2, xyz = 1, z > 0\}.$$

Rozmyslíme si, že stači vyšetřit množinu M_2. Mějme totiž bod $[x, y, z] \in M_1$. Pak $xyz > 1$. Protože $z > 0$, je i $xy > 0$. Bod $[x, y, \frac{1}{xy}] \in M_2$ splňuje

$$f(x, y, \frac{1}{xy}) = xy + \frac{1}{xy} < xy + z = f(x, y, z).$$

Tedy pro každý bod množiny M_1 jsme nalezli bod množiny M_2, v němž je hodnota menší. Proto infimum na M je rovno infimu na M_2.

Krok 3, podezřelé body na M_2. Použijeme Větu V.19. Máme $G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$, $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2$, $g_2(x, y, z) = xyz - 1$. Funkce f, g_1, g_2 jsou třídy C^1.

Příslušné gradienty jsou:

$$\begin{aligned}
\nabla f &= [y, x, 1], \\
\nabla g_1 &= [2x, 2y, 0], \\
\nabla g_2 &= [yz, xz, xy]
\end{aligned}$$

Pokud je v bodě $[x, y, z]$ lokální extrém vzhledem k M_2, podle Věty V.19 jsou následující možnosti:

- Existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které $\nabla g_2 = \alpha \nabla g_1$. Porovnáním třetích souřadnic dostaneme $xy = 0$. Takový bod v množině M_2 ovšem není (druhá rovnost pak platit nemůže).

- Existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které $\nabla g_1 = \alpha \nabla g_2$. Porovnáním třetích souřadnic dostaneme, že $xy = 0$ nebo $\alpha = 0$. První možnost nastat nemůže dle předchozího bodu; druhá možnost by znamenala $x = y = 0$, což žádný bod M_2 nesplňuje.

- Existují $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ splňující soustavu

  $$\begin{aligned}
  y + \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 yz &= 0, \\
  x + \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 xz &= 0, \\
  1 + \lambda_2 \cdot xy &= 0
  \end{aligned}$$

  Odečteme y-násobek druhé rovnice od x-násobku první rovnice a dostaneme

  $$2\lambda_1(x^2 - y^2) = 0,$$

  tedy buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x^2 = y^2$.

Pokud $x^2 = y^2$, pak $x = \pm y$. Protože však $xyz = 1$ a $z > 0$, je $xy > 0$, tedy x a y mají stejné znaménko. Proto $x = y$. Dostaneme tedy dva podezřelé body

$$[1, 1, 1], [-1, -1, -1], \quad f(1, 1, 1) = f(-1, -1, 1) = 2.$$

Prozkoumejme druhou možnost - $\lambda_1 = 0$. Pak soustava má tvar

$$\begin{aligned} y + \lambda_2 yz &= 0, \\ x + \lambda_2 xz &= 0, \\ 1 + \lambda_2 \cdot xy &= 0. \end{aligned}$$

Protože $x \neq 0$ a $y \neq 0$, první i druhá rovnice dává $1 + \lambda_2 z = 0$, tedy $\lambda_2 = -\frac{1}{z}$. Dosazením do třetí rovnice dostáváme $1 - \frac{xy}{z} = 0$, neboli

$$1 = \frac{xy}{z} = \frac{1}{z^2}.$$

Tedy $z^2 = 1$. Protože $z > 0$, dostaneme $z = 1$, a tedy $xy = 1$. Dosazením $y = \frac{1}{x}$ do rovnice $x^2 + y^2 = 2$ dostaneme $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$, neboli $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$. Kořeny jsou $x = \pm 1$, což dává dva již nalezené podezřelé body.

Krok 4, jsou to opravdu body minima. Funkce f je součtem dvou výrazů, totiž xy a z. První z nich má kladné hodnoty, jak jsme již zdůvodnili výše. Dále množina

$$M' = \{[x, y, z] \in M; z \leq 3\}$$

je uzavřená a omezená, tedy kompaktní. Je neprázdná, protože obsahuje výše nalezené podezřelé body. Tedy f nabývá minima na M'. Pokud bod minima splňuje $z < 3$, musí to být jeden z výše nalezených podezřelých bodů. Pokud $z = 3$, pak $f(x, y, z) \geq z = 3 > 2$ (2 je funkční hodnota v podezřelých bodech), tedy v oněch bodech je minimum na M'.

Pro $[x, y, z] \in M \setminus M'$ je $f(x, y, z) \geq z > 3 > 2$, tedy jde i o minimum na M.

Krok 5, závěr: Supremum neexistuje, protože f není shora omezená. Minimum je 2 a nabývá se ve dvou výše nalezených bodech.