Vyšetření konvergence Newtonova integrálu $\int_0^\infty \sin(x^\alpha) \cdot \operatorname{arctg}^\beta x \, dx$ pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

① Integrand je spojitá funkce na $(0,\infty)$, má tedy primitivní funkci. Je proto třeba vyšetřit chování u $0+$ a u $+\infty$.

② Chování u $+\infty$, tj. konvergence $\int_1^\infty \dots$:

- funkce $x \mapsto \sin(x^\alpha)$, $x \mapsto \operatorname{arctg}^\beta x$ jsou spojité na $\langle 1,\infty)$.

Navíc $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}^\beta x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\beta \in (0,\infty)$

a funkce $x \mapsto \operatorname{arctg}^\beta x$ je na $\langle 1,\infty)$ rostoucí pro $\beta > 0$, konstantní pro $\beta = 0$, klesající pro $\beta < 0$,

V každém případě je tedy monotónní. Podle symetrické verze Abelova kritéria platí

$\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \cdot \operatorname{arctg}^\beta x \, dx$ konverguje (absolutně konverguje)

$\iff \int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, dx$ konverguje (absolutně konverguje)

Vyšetříme tedy konvergenci (absolutní konvergenci) $\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \, dx$

- Pro $\alpha = 0$ $\int_1^\infty \sin(1) \, dx$ diverguje
- Pro $\alpha < 0$: $\sin(x^\alpha) > 0$ na $\langle 1,\infty)$, tedy konvergence a absolutní konvergence je totéž

Protože $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\alpha} = 1 \in (0,\infty)$, dle limitního

srovnávacího kritéria $\int_1^\infty \sin(x^\alpha)$ konverguje $\iff$

$\iff$ konverguje $\int_1^\infty x^\alpha$, což je právě když $\alpha < -1$

Pro $\alpha > 0$ funkce $x \mapsto \sin(x^\alpha)$ mění znaménko na $\langle 1, \infty)$

provedeme substituci

$$„y = x^\alpha", \text{ tj. } x = y^{1/\alpha},\ y \in \langle 1, \infty),$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} > 0 \text{ na } (1, \infty)$$

Tedy $\displaystyle\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin(y)\,dy$

$\left[\text{a taktéž } \displaystyle\int_1^\infty |\sin(x^\alpha)|\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} |\sin y|\,dy\right]$,

má-li jedna strana smysl.

Konvergenci a absolutní konvergenci $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ jsme

vyšetřovali, a tak víme, že náš integrál

- konverguje absolutně pro $\frac{1}{\alpha} - 1 < -1$
- konverguje neabsolutně pro $-1 \le \frac{1}{\alpha} - 1 < 0$
- diverguje pro $\frac{1}{\alpha} - 1 \ge 0$

Protože $\alpha > 0$, první možnost nenastává,
druhá je ekvivalentní $\alpha > 1$
a třetí je ekvivalentní $0 < \alpha \le 1$

Závěr „u $+\infty$":

$\displaystyle\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \operatorname{arctg}^\beta x\,dx$: pro $\alpha < -1$ konverguje absolutně
pro $\alpha > 1$ konverguje neabsolutně
pro $-1 \le \alpha \le 1$ diverguje.

(3) chování u 0+:

Platí $\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{arctg}^\beta x}{x^\beta} = 1$, navíc je fukce $x \mapsto \frac{\operatorname{arctg}^\beta x}{x^\beta}$

monotónní na $(0,\delta)$ pro vhodné $\delta > 0$:

k tomu stačí ukázat, že funkce $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ je monotónní na $(0,\delta)$. To je vidět například takto:

označme $g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Víme, že g je na $(-1,1)$ součtem mocninné řady:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} = 1 - \frac{x^2}{3} + \cdots,$$

speciálně platí $g'(0) = 0$, $g''(0) = -\frac{2}{3}$ (z tvaru Taylorovy řady)

Protože $g'(0) = 0$ a $g''(0) = (g')'(0) = -\frac{2}{3}$,

je $g'(x) < 0$ pro $x \in (0,\delta)$ pro vhodné $\delta > 0$,

tedy g je klesající na $(0,\delta)$.

Tedy dle symetrické verze Abelova kritéria

$\int_0^1 \cdots$ konverguje (absolutně) $\Leftrightarrow \int_0^1 \sin(x^\alpha)\cdot x^\beta\,dx$ konverguje (absolutně)

[Podrobněji:

$$\int_0^1 \cdots \; K\,(KA) \Leftrightarrow \int_0^\delta \cdots \; K\,(KA) \Leftrightarrow \underset{K\,(KA)}{\int_0^\delta \sin(x^\alpha)\cdot x^\beta\,dx}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{K\,(KA)}{\int_0^1 \sin(x^\alpha)\, x^\beta\,dx} \;]$$

Vyšetříme teď $\int_0^1 \sin(t^\alpha)\, t^\beta\, dt$:

$\alpha \geq 0$: $\sin(t^\alpha)\, t^\beta > 0$ na $(0, \theta)$ pro vhodné $\theta > 0$

($\alpha = 0$ ... je to složené na $(0,\infty)$

$\alpha > 0$ ... $\theta = \pi^{\frac{1}{\alpha}}$) . Teď „$k = Ak$"

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\sin(t^\alpha)\, t^\beta}{t^\alpha\, t^\beta} = \begin{cases} \sin 1 & , \alpha = 0 \\ 1 & , \alpha > 0 \end{cases}$$

Teď $\int_0^1 \sin(t^\alpha)\, t^\beta\, dt$ konverguje $\iff$ konv. $\int_0^1 t^{\alpha+\beta}\, dt$

$\Updownarrow$

$\alpha + \beta > -1$

$\alpha < 0$ provedeme substituci: $y = t^\alpha$

$t = y^{1/\alpha}$, $y \in (1, \infty)$

$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{\alpha}\, y^{\frac{1}{\alpha} - 1} < 0$

Teď $\int_0^1 \sin(t^\alpha)\, t^\beta\, dt = \int_1^\infty \sin(y) \cdot y^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \left|\frac{1}{\alpha}\right| y^{\frac{1}{\alpha} - 1}\, dt =$

$= \int_1^\infty \sin(y) \cdot \left|\frac{1}{\alpha}\right| \cdot y^{\frac{\beta+1}{\alpha} - 1}\, dt$

Už víme, že tento integrál

konverguje absolutně pro $\frac{\beta+1}{\alpha} - 1 < -1$

konverguje neabsolutně pro $-1 \leq \frac{\beta+1}{\alpha} - 1 < 0$

diverguje pro $\frac{\beta+1}{\alpha} - 1 \geq 0$

První případ: $\frac{\beta+1}{\alpha} - 1 < -1$

$\frac{\beta+1}{\alpha} < 0$

$\beta + 1 > 0$ $(\alpha < 0)$

$\beta > -1$

druhý případ: $\quad -1 \le \frac{\beta+1}{\alpha} - 1 < 0$

$$0 \le \frac{\beta+1}{\alpha} < 1$$

$$0 \ge \beta+1 > \alpha \qquad (\alpha<0)$$

$$-1 \ge \beta > \alpha-1$$

třetí případ: $\quad \frac{\beta+1}{\alpha} - 1 \ge 0 \iff \beta \ge \alpha - 1$

Závěr „u 0+"

$\int_0^1 \sin(x^\alpha)\,\mathrm{arctg}^\beta x$:

KA, pokud $\alpha \ge 0,\ \alpha+\beta > -1$
nebo $\alpha < 0,\ \beta > -1$

KNA, pokud $\alpha < 0,\ -1 \ge \beta > \alpha - 1$

D jinak, tj. pokud $\alpha \ge 0,\ \alpha+\beta \le 1$
nebo $\alpha < 0,\ \beta \ge \alpha - 1$

Celkový závěr: $\quad \int_0^\infty \sin(x^\alpha)\,\mathrm{arctg}^\beta x\,dx$

KA $\iff \alpha < -1,\ \beta > -1$

KNA $\iff \alpha < -1,\ -1 \ge \beta > \alpha - 1$
nebo $\alpha > 0,\ \alpha+\beta > -1$

D v ostatních případech