K oddílu VI.1 (druhá část) – násobení matic, transponované matice

K definici maticového násobení

- Násobit spolu lze jen matice kompatibilních typů. Součin matice typu $m \times k$ a matice typu $k \times n$ je matice $m \times n$.

  Tedy: Součin matic $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ je definován, pokud počet sloupců matice $\mathbb{A}$ je stejný jako počet řádků matice $\mathbb{B}$. Výsledná matice má pak počet řádků stejný jako $\mathbb{A}$ a počet sloupců stejný jako $\mathbb{B}$.

- Součin matice typu $1 \times k$ (tj. řádkového vektoru délky k) a matice typu $k \times 1$ (tj. sloupcového vektoru délky [resp. výšky] k) je tedy matice 1×1, kterou interpretujeme jako číslo. Tento součin je definován

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k,$$

  například

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 7 \cdot 8 = 55.$$

- Součin matic $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ lze popsat takto: Aby byl definován, musí být délka řádků matice $\mathbb{A}$ stejná jako délka (tj. výška) sloupců matice $\mathbb{B}$. Přitom číslo na místě ij ve výsledné matici je rovno součinu i-tého řádku matice $\mathbb{A}$ a j-tého sloupce matice $\mathbb{B}$. Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 7 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot 7 \end{pmatrix}$$

- Součin matice typu $m \times k$ a sloupcového vektoru délky k je sloupcový vektor délky m.

  S tím souvisí následující pozorování, které se bude často hodit: Je-li součin $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ definován, pak j-tý sloupec matice $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ lze spočítat jako součin matice $\mathbb{A}$ a j-tého sloupce matice $\mathbb{B}$.

- Podobně, součin řádkového vektoru délky k a matice typu $k \times n$ je řádkový vektor délky n.

  A opět s tím souvisí užitečné pozorování: Je-li součin $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ definován, pak i-tý řádek matice $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ lze spočítat jako součin i-tého řádku matice $\mathbb{A}$ a matice $\mathbb{B}$.

- U maticového násobení záleží na pořadí, tj. násobení matic není komutativní. Podrobněji:

  - Pokud je například $\mathbb{A}$ matice typu 3×2 a $\mathbb{B}$ matice typu 2×4, pak součin $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ je definován a součin $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ není definován.
  - Pokud je například $\mathbb{A}$ matice typu 3×2 a $\mathbb{B}$ matice typu 2×3, pak součin $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ je matice typu 3×3 a součin $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ je matice typu 2×2. Oba součiny jsou definovány, ale jsou to matice různých typů.
  - Pokud $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jsou čtvercové matice řádu n, pak $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ i $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ jsou čtvercové matice řádu n, ale nemusí se rovnat. Snadno se najde příklad mezi čtvercovými maticemi řádu 2.

Cvičení:

1. *Popište, jak funguje násobení diagonálních matic řádu n. Je komutativní?*
2. *Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B}$ je čtvercová matice řádu 2. Čemu se rovná $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ a čemu $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$? Liší se?*
3. *Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B}$ je čtvercová matice řádu 2. Čemu se rovná $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ a čemu $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$? Liší se?*

K Větě VI.2:

- Tvrzení (i)–(iii) této věty se dokáže výpočtem. Nejprve určíme přípustné typy příslušných matic a ukážeme, že pak matice na levé a na pravé straně jsou stejného typu. Poté pomocí definice maticového násobení spočteme prvek na místě ij matice na levé straně a matice na pravé straně a ověříme, že to vyjde stejně. Důkaz provedeme podrobně pro tvrzení (i).

- Důkaz tvrzení (i): Aby měla smysl levá strana, musí mít $\mathbb{B}$ stejně sloupců jako má $\mathbb{C}$ řádků. Aby měla smysl pravá strana, musí mít $\mathbb{A}$ stejně sloupců jako má $\mathbb{B}$ řádků. Předpokládejme tedy, že $\mathbb{A}$ je typu $m \times p$, $\mathbb{B}$ je typu $p \times q$ a $\mathbb{C}$ je typu $q \times n$.

  Pak $\mathbb{BC}$ je typu $p \times n$, tedy $\mathbb{A}(\mathbb{BC})$ je typu $m \times n$.

  Matice $\mathbb{AB}$ je typu $m \times q$, tedy $(\mathbb{AB})\mathbb{C}$ je typu $m \times n$.

  Proto matice na levé i na pravé straně jsou definované a stejného typu. Zbývá spočítat, že mají stejné prvky. Označme prvky matice $\mathbb{A}$ jako a_{ij}, prvky matice $\mathbb{B}$ jako b_{ij} a prvky matice $\mathbb{C}$ jako c_{ij}.

  Podle definice maticového násobení má matice $\mathbb{A}(\mathbb{BC})$ na místě ij číslo

  $$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\mathbb{BC})_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{q} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right).$$

  Přitom symbolem $(\mathbb{BC})_{kj}$ označujeme prvek na místě kj v matici $\mathbb{BC}$. První rovnost je opět z definice maticového násobení, druhá plyne z distributivity sčítání vůči násobení pro čísla.

  Podobně má matice $(\mathbb{AB})\mathbb{C}$ na místě ij číslo

  $$\sum_{l=1}^{q} (\mathbb{AB})_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right).$$

  Když oba výsledky porovnáme, vidíme, že v obou případech jde o součet všech výrazů tvaru $a_{ik}b_{kl}c_{lj}$ pro $k \in \{1,\ldots,p\}$ a $l \in \{1,\ldots,q\}$. Tyto výrazy jsou jinak uspořádané a uzávorkované, ale protože sčítání čísel je komutativní a asociativní, je výsledek v obou případech stejný.

- Tvrzení (ii) a (iii) se dokážou podobně jako tvrzení (i), jen je výpočet jednodušší.

- Důkaz tvrzení (iv):

  - Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Označme symbolem $\mathbb{I}$ čtvercovou matici řádu n, která má na diagonále samé jedničky a mimo diagonálu samé nuly. Pro $n = 1, 2, 3$ jde o matice

    $$(1), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Této matici říkáme jednotková matice řádu n.

- Nechť $\mathbb{I}$ je jednotková matice řádu n.

  Pak pro každou matici $\mathbb{A}$, která má n řádků, platí $\mathbb{I} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A}$. Díky vlastnostem maticového násobení to stačí dokázat, pokud $\mathbb{A}$ je sloupcový vektor délky n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

  protože na j-tém místě (tj. v j-tém řádku) součinu je

$$\mathbb{I}_{j1} \cdot a_1 + \mathbb{I}_{j2} \cdot a_2 + \dots + \mathbb{I}_{jn} \cdot a_1 = a_j,$$

  kde $\mathbb{I}_{jk}$ značí číslo na místě jk v matici $\mathbb{I}$. Stačí si uvědomit, že $\mathbb{I}_{jk}$ je rovno 0 pro $j \neq k$ a je rovno 1 pro $j = k$.

  Analogicky je vidět, že pro každou matici $\mathbb{B}$, která má n řádků, platí $\mathbb{B} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{B}$. Opět to díky vlastnostem maticového násobení stačí dokázat, pokud $\mathbb{B}$ je řádkový vektor délky n:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

- Speciálně, pokud je $\mathbb{I}$ jednotková matice řádu n a $\mathbb{A}$ čtvercová matice řádu n (tj. má n řádků a n sloupců), pak $\mathbb{I} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{A}$.

- Vlastnost z předchozího bodu charakterizuje jednotkovou matici. Kdyby totiž $\mathbb{J}$ byla jiná čtvercová matice řádu n taková, že pro každou čtvercovou matici $\mathbb{A}$ řádu n platí $\mathbb{J} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{J} = \mathbb{A}$, pak by speciálně platilo

$$\mathbb{J} = \mathbb{J} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I}.$$

K definici transponované matice:

- Transponovaná matice k matici $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ je matice $\mathbb{A}^T$ typu $n \times m$, která vypadá následovně:

  V i-tém řádku matice $\mathbb{A}^T$ jsou prvky i-tého sloupce matice $\mathbb{A}$.

  Podobně, v j-tém sloupci matice $\mathbb{A}^T$ jsou prvky j-tého řádku matice $\mathbb{A}$.

- Příklady transponovaných matic:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Pokud $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n, pak $\mathbb{A}^T$ je opět čtvercová matice řádu n. Přitom $\mathbb{A}^T$ vznikne z $\mathbb{A}$ „převrácením podle diagonály:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Speciálním typem čtvercových matic jsou tzv. symetrické matice, tj. ty, které se převrácením podle diagonály nezmění, neboli matice splňující $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$. Příklady symetrických matic:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 7 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

  Symetrické matice jsou dosti důležité, ale o tom se přesvědčíme až v Matematice III.

K Větě VI.3:

- Body (i) a (ii) jsou velmi snadné.
- Důkaz bodu (iii):
  - $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je matice typu $m \times k$, tedy $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T$ je matice typu $k \times m$.
    $\mathbb{B}^T$ je matice typu $k \times n$, $\mathbb{A}^T$ je matice typu $n \times m$, tedy součin $\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$ je definován a je to matice typu $k \times n$.

    Tedy levá i pravá strana jsou definována a jsou to matice téhož typu.
  - Dokažme nejprve speciální případ $m = k = 1$. Pak

    $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

    tedy

    $$\mathbb{A}\mathbb{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_n b_n$$

    je matice typu 1×1, tedy vlastně číslo. Tato matice se transponováním nezmění, tedy i

    $$(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_n b_n.$$

    Dále,

    $$\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_n a_n.$$

    Protože násobení čísel je komutativní, jsou oba výrazy stejné, neboli v tomto případě je $\mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$.
  - Obecný případ: Porovnejme prvky na místě ij:

    $$((\mathbb{A}\mathbb{B})^T)_{ij} = (\mathbb{A}\mathbb{B})_{ji} = (j\text{-tý řádek } \mathbb{A}) \cdot (i\text{-tý sloupec B}),$$

    $$\begin{aligned} (\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T)_{ij} &= (i\text{-tý řádek } \mathbb{A}^T) \cdot (j\text{-tý sloupec B}^T) \\ &= (i\text{-tý sloupec } \mathbb{A})^T \cdot (j\text{-tý řádek B})^T. \end{aligned}$$

    Podle předchozího bodu odsud plyne, že $((\mathbb{A}\mathbb{B})^T)_{ij} = (\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T)_{ij}$.

Cvičení: Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$.

1. *Ukažte, že součiny $\mathbb{A}^T\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}\mathbb{A}^T$ jsou definovány.*
2. *Jaké jsou typy těchto matic?*
3. *Ukažte, že jsou symetrické.*
4. *Pokud $m = n$, neboli $\mathbb{A}$ je čtvercová matice, musí se oba součiny rovnat?*