IV.7 Derivace funkce – aplikace

Definice. Nechť f je funkce a $a \in \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a

- **lokální maximum**, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(a, \delta)$ je $f(x) \leq f(a)$;
- **lokální minimum**, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(a, \delta)$ je $f(x) \geq f(a)$;
- **lokální extrém**, má-li v bodě a lokální maximum nebo lokální minimum.

Poznámka. Má-li f v bodě a lokální extrém, je definovaná alespoň na nějakém okolí bodu a.

Věta 31 (nutná podmínka lokálního extrému). *Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Existuje-li $f'(a)$, pak je $f'(a) = 0$.*

Věta 32 (Rolleova). *Nechť $a < b$ a funkce f má následující vlastnosti:*

(i) *je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,*
(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*
(iii) *$f(a) = f(b)$.*

Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí $f'(\xi) = 0$.

Věta 33 (Lagrangeova). *Nechť $a < b$ a funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takový, že platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 34 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce na intervalu). *Nechť J je interval, funkce f je spojitá na J a má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém vnitřním bodě intervalu J.*

(i) *Funkce f je neklesající na intervalu J, právě když pro každý vnitřní bod x intervalu J platí $f'(x) \geq 0$.*
(ii) *Je-li $f'(x) > 0$ pro každý vnitřní bod x intervalu J, je funkce f na intervalu J rostoucí.*

Analogicky pro funkce nerostoucí či klesající.

Důsledek. *Je-li $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f na intervalu (a, b) konstantní.*

Poznámka. V bodě (ii) obrácená implikace neplatí.

Věta 35 (výpočet jednostranné derivace). *Nechť funkce f je spojitá zprava v bodě a a nechť existuje $\lim_{x\to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} f'(x).$$

Analogicky pro derivaci zleva a oboustrannou derivaci.

Věta 36 (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbf{R}^*$ vlastní derivace a $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje. Nechť platí jedna z následujících podmínek*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$,
(ii) $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$.

Potom existuje i $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Analogické tvrzení platí pro limity zleva a zprava.