IV.8 Konvexní a konkávní funkce

Poznámka. Nechť $x_1 < x_2$ a $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$. Pak bod

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_1 + (1-\lambda)(x_2 - x_1)$$

patří do intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$. Pokud $\lambda \in (0,1)$, pak onen bod patří do (x_1, x_2). A obráceně, pro každé $z \in \langle x_1, x_2 \rangle$ existuje právě jedno $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$, pro které platí $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

Definice. Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- **konvexní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2)$.
- **konkávní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2)$.
- **ryze konvexní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0,1)$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2)$.
- **ryze konkávní**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0,1)$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2)$.

Poznámka. Funkce f je (ryze) konkávní na intervalu I, právě když funkce $-f$ je (ryze) konvexní na I.

Větička 37. *Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Pak následující tři tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *Funkce f je na I konvexní.*

(ii) *Pro každou trojici bodů $x_1, x_2, x_3 \in I$ takovou, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí* $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$.

(iii) *Pro každou trojici bodů $x_1, x_2, x_3 \in I$ takovou, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí* $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Poznámka. Analogické charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Věta 38. *Nechť f má v každém bodě otevřeného intervalu I vlastní derivaci. Pak funkce f je konvexní, právě když je funkce f' neklesající na I. Funkce f je ryze konvexní na I, právě když funkce f' je rostoucí na I.*

Poznámka. Analogická věta platí pro konkávnost a ryzí konkávnost.

Definice. **Druhou derivací** funkce f v bodě a rozumíme

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a},$$

jestliže tato limita existuje. Druhá derivace funkce f je tedy derivace její derivace. Obdobně definujeme derivace vyšších řádů, n-**tou derivaci** funkce f v bodě a značíme $f^{(n)}(a)$. Je přitom

$$f^{(1)}(a) = f'(a), \qquad f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a) \text{ pro } n \in \mathbf{N}.$$

Věta 39. *Nechť f má v každém bodě otevřeného intervalu I vlastní druhou derivaci. Pak platí:*

(i) *Funkce f je konvexní na intervalu I, právě když $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in I$.*
(ii) *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, je f ryze konvexní na I.*

Poznámka. Analogická věta platí pro konkávnost a ryzí konkávnost.

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$ a T_a označuje tečnu ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a))$. Řekneme, že **bod** $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** T_a, jestliže $f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$. Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že **bod** $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** T_a.

Definice. Nechť f má v bodě a vlastní derivaci. Řekneme, že a je **inflexním bodem funkce** f, jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a) :$ $[x, f(x)]$ leží pod tečnou,
(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta) :$ $[x, f(x)]$ leží nad tečnou,

nebo

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a) :$ $[x, f(x)]$ leží nad tečnou,
(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta) :$ $[x, f(x)]$ leží pod tečnou.

Věta 40 (nutná podmínka pro inflexní bod). *Nechť $f''(a)$ existuje a je různá od 0. Potom a není inflexním bodem funkce f.*

Věta 41 (postačující podmínka pro inflexní bod). *Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Nechť platí:*

$$\forall x \in (a, z) : \; f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (z, b) : \; f''(x) < 0.$$

Potom z je inflexním bodem funkce f.