II.1 Pojem posloupnosti

Definice. Je-li každému přirozenému číslu n přiřazeno reálné číslo a_n, říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **posloupnost reálných čísel**. Číslo a_n nazýváme n-**tým členem posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. Místo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ píšeme často jen $\{a_n\}$.

Definice. **Množinou členů posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme množinu

$$\{x \in \mathbf{R};\ \exists n \in \mathbf{N}\colon a_n = x\}.$$

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **shora omezená**, je-li množina jejích členů shora omezená. Analogicky definujeme **zdola omezenou** a **omezenou** posloupnost.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **rostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$;
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$;
- **nerostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$;
- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$;
- **monotónní**, je-li nerostoucí nebo neklesající;
- **ryze monotónní**, je-li rostoucí nebo klesající.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.

- **Součtem posloupností** $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme **rozdíl a součin posloupností**.
- Nechť všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nenulové. Pak **podílem posloupností** $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$.
- Je-li $\lambda \in \mathbf{R}$, pak λ-násobkem posloupnosti $\{a_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\lambda a_n\}$.

II.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že číslo $a \in \mathbf{R}$ je **limitou posloupnosti** $\{a_n\}$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$; tj. pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

V tom případě říkáme rovněž, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu** a; posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje k** a. Zapisujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nebo jen $\lim a_n = a$ nebo též $a_n \to a$.

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $a \in \mathbf{R}$. Pak

$$a_n \to a \Leftrightarrow a_n - a \to 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0.$$

Definice. Nechť $x \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. ε-**ovým okolím bodu** x rozumíme množinu

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbf{R}\colon |y - x| < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Poznámka. Číslo a je limitou posloupnosti $\{a_n\}$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbf{N} \, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \colon a_n \in B(a, \varepsilon).$$

Věta 1 (jednoznačnost limity). *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Věta 2. *Budiž $\{a_n\}$ konvergentní. Potom je $\{a_n\}$ omezená.*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je **vybraná posloupnost z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (nebo též **podposloupnost** posloupnosti $\{a_n\}$), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro každé $k \in \mathbf{N}$.

Věta 3 (limita vybrané posloupnosti). *Nechť $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná podposloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, pak také $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = A$.*

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $a \in \mathbf{R}$ a $K > 0$. Předpokládejme, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbf{N} \, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : |a_n - a| < K\varepsilon.$$

Pak $a_n \to a$.

Věta 4 (aritmetika limit). *Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$,
(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
(iii) *je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, je $\lim(a_n/b_n) = A/B$.*

Poznámka. Je-li $\lim b_n = B$ a $B \neq 0$, pak existuje takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $b_n \neq 0$. Proto i v tomto případě často mluvíme o posloupnosti $\{a_n/b_n\}$, třebaže několik jejích členů není definováno. Pak v bodě (iii) Věty 4 lze škrtnout předpoklad nenulovosti všech členů posloupnosti $\{b_n\}$.

Věta 5 (limita a uspořádání). *Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dvě konvergentní posloupnosti. Označme $A = \lim a_n$, $B = \lim b_n$.*

(i) *Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n < b_n$.*
(ii) *Nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.*

Věta 6 (o dvou policajtech). *Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dvě konvergentní posloupnosti a $\{c_n\}$ taková posloupnost, že platí:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,
(ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

Věta 7. *Nechť $\lim a_n = 0$ a nechť posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Potom*

$$\lim a_n b_n = 0.$$