IV.2 Další vlastnosti limit funkcí

Věta 4 (aritmetika limit). *Nechť* $c \in \mathbf{R}^*$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ *a* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$. *Potom platí:*

(i) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = A+B$, *pokud je výraz* $A+B$ *definován,*
(ii) $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*
(iii) $\lim\limits_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Důsledek. *Nechť reálné funkce* f *a* g *jsou spojité v bodě* $a \in \mathbf{R}$. *Pak také funkce* $f+g$, fg *jsou spojité v bodě* a. *Pokud navíc* $g(a) \neq 0$, *pak také* f/g *je spojitá v bodě* a.

Věta 5 (o srovnání). *Nechť* $c \in \mathbf{R}^*$ *a dále* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ *a* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$.

(i) *Jestliže* $A > B$, *pak existuje prstencové okolí* $P(c,\delta)$ *takové, že pro každé* $x \in P(c,\delta)$ *platí* $f(x) > g(x)$.
(ii) *Jestliže existuje prstencové okolí* $P(c,\delta)$ *takové, že pro každé* $x \in P(c,\delta)$ *platí* $f(x) \leq g(x)$, *pak platí* $A \leq B$.

Věta 6 (o policajtech). *Nechť* $a \in \mathbf{R}^*$.

(i) *Nechť* f, g, h *jsou funkce, pro které platí:*
- *Existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ *takové, že pro* $x \in P(a,\delta)$ *platí* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Potom existuje rovněž $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ *a rovná se* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(ii) *Nechť* f *a* g *jsou funkce, pro které platí:*
- *Existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ *takové, že pro* $x \in P(a,\delta)$ *platí* $f(x) \leq g(x)$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Potom také $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

(iii) *Nechť* f *a* g *jsou funkce, pro které platí:*
- *Existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ *takové, že pro* $x \in P(a,\delta)$ *platí* $f(x) \geq g(x)$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Potom také $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$.

Věta 7 (doplňky k aritmetice limit). *Nechť* f *a* g *jsou funkce a* $c \in \mathbf{R}^*$.

(a) *Je-li* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ *a funkce* g *je omezená na* $P(c,\delta)$ *pro nějaké* $\delta > 0$, *pak* $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.
(b) *Je-li* $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ *a funkce* g *je kladná na* $P(c,\delta)$ *pro nějaké* $\delta > 0$, *pak* $\lim\limits_{x\to c} f(x)/g(x) = +\infty$.

Věta 8 (o limitě složené funkce). *Nechť funkce f a g splňují:*

(i) $\lim\limits_{x\to c} g(x) = A$,

(ii) $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$.

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(P1) *f je spojitá v A,*

(P2) $\exists\eta > 0\,\forall x \in \mathcal{P}(c,\eta):\ g(x) \neq A$,

pak $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = B$.

Důsledek (spojitost složené funkce). *Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbf{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(a)$. Pak funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a.*

Poznámka. Zřejmé analogie Vět 2 až 7 platí pro limity zleva a zprava. Podobně analogie důsledků Věty 3 a Věty 4 platí i pro spojitost zleva a zprava. Své analogie pro jednostranné limity má i Věta 8. Jedna z variant Věty 8 pro jednostranné limity je tato:

Nechť funkce f a g splňují:

(i) $\lim\limits_{x\to c} g(x) = A$,

(ii) $\lim\limits_{y\to A+} f(y) = B$.

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(P1) *f je spojitá v bodě A zprava a navíc* $\exists\eta > 0\,\forall x \in \mathcal{P}(c,\eta):\ g(x) \geq A$,

(P2) $\exists\eta > 0\,\forall x \in \mathcal{P}(c,\eta):\ g(x) > A$,

pak $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = B$.

Věta 9 (o limitě monotonní funkce). *Budiž funkce f monotonní na (a,b), $a,b \in \mathbf{R}^*$. Potom existují* $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ *a* $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$.

Věta 10 (Heine). *Nechť $c, A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel splňujících $x_n \neq c$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $\lim x_n = c$. Pak $\lim f(x_n) = A$.*

Poznámky.

(1) Analogická tvrzení platí pro limitu zleva a limitu zprava. (Pro limitu zprava se předpoklad $x_n \neq c$ nahradí předpokladem $x_n > c$.)

(2) Platí i obrácení Věty 10: Jestliže f je definována na $P(c,\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ a pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků D_f různých od c splňující $\lim x_n = c$ platí $\lim f(x_n) = A$, pak $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$.

Možná srozumitelnější je obměna: Je-li f definována na $P(c,\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ a přitom A není limitou funkce f v bodě c, pak existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků D_f různých od c, pro kterou platí $\lim x_n = c$, ale A není limitou posloupnosti $\{f(x_n)\}$.

Podobně pro jednostranné limity.