

IV.3 Derivace funkce – definice a početní technika

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce f v bodě a** budeme rozumět $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, pokud tato limita existuje;
- **derivací zprava funkce f v bodě a** budeme rozumět $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, pokud tato limita existuje;
- **derivací zleva funkce f v bodě a** budeme rozumět $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, pokud tato limita existuje.
- Derivaci funkce v bodě (zprava, zleva) nazýváme **vlastní**, je-li příslušná limita vlastní; **nevlastní**, je-li příslušná limita nevlastní.

Poznámka. Derivaci lze ekvivalentně definovat limitami:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}; f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}; f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Definice. Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Pak přímku danou rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ nazýváme **tečnou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$** .

Poznámka (o tečnosti tečny): Nechť f je funkce a nechť přímka daná rovnicí $y = kx + q$ prochází bodem $[a, f(a)]$. Pak tato přímka je tečnou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$, právě když $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (kx + q)}{x - a} = 0$.

Větička 11. Funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ derivaci $A \in \mathbf{R}^*$, právě když $f'_+(a) = f'_-(a) = A$.

Věta 12. Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá. Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci zprava, je spojitá v bodě a zprava. Podobně pro derivaci zleva.

Věta 13 (aritmetika derivací). Nechť f a g mají v bodě a vlastní derivaci a $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom platí

- (i) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$,
 $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$;
- (ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
- (iii) je-li $g(a) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Poznámka. V tvrzení (i) lze předpoklad existence vlastních derivací nahradit předpokladem, že výraz na pravé straně je definován. V případě tvrzení (ii) a (iii) je to složitější.

Věta 14 (derivace složené funkce). Nechť f má vlastní derivaci v bodě y_0 . Nechť g má vlastní derivaci v bodě x_0 a $g(x_0) = y_0$. Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$